Mesures Produit & Espaces de Hilbert

Exercice 1 – ***Mesure de Lebesgue produit***. Soient $d \geq 2$ et λ_d la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}(\mathbb{R}^d))$. Montrer que

$$\lambda_d = \underbrace{\lambda_1 \otimes \cdots \otimes \lambda_1}_{d \text{ fois}} .$$

Indication : On pourra commencer par démontrer le lemme de changement de variable suivant : Soit $f : (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})) \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-a)\, \lambda_1(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \lambda_1(\mathrm{d}x) .$$

Exercice 2 – ***Tribu produit & fonctions coordonnées***. Soient $(X, \mathscr{A})$, $(Y, \mathscr{B})$ et $(Z, \mathscr{C})$ trois espaces mesurables, et

$$f : \begin{array}{ccc} (Z, \mathscr{C}) & \longrightarrow & (X \times Y, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}) \\ z & \longmapsto & (f_X(z), f_Y(z)) . \end{array}$$

Montrer que f est $(\mathscr{C}, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B})$-mesurable si, et seulement si f_X et f_Y sont respectivement $(\mathscr{C}, \mathscr{A})$ et $(\mathscr{C}, \mathscr{B})$-mesurables.

Exercice 3 – ***Applications linéaires***.

1. Soient E et F deux espaces pré-hilbertiens et soit $L : E \to F$ une application linéaire qui conserve la norme, *i.e.* $\|Lx\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Montrer que L conserve aussi le produit scalaire, *i.e.* $\langle Lx \mid Ly \rangle_F = \langle x \mid y \rangle_E$ pour tous $x, y \in E$.
2. Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Montrer que $M = (M^\perp)^\perp$.
3. Soient $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $L : \mathscr{H} \to \mathbb{K}$ une application linéaire continue. Posons $M = \ker L$.
   (a) Montrer que M est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathscr{H}$.
   (b) Montrer que si $M \neq \mathscr{H}$, alors $M^\perp$ est de dimension 1.

Exercice 4 – ***Projections orthogonales***.

1. Soit P la projection orthogonale associée à un sous-espace fermé $\mathscr{S}$ d'un espace de Hilbert $\mathscr{H}$, *i.e.* $P(u) = u$ si $u \in \mathscr{S}$ et $P(u) = 0$ si $u \in \mathscr{S}^\perp$. Montrer que $P^2 = P$ et que $P^* = P$. En déduire que $\|P\| \leq 1$ avec égalité lorsque $\mathscr{S} \neq \{0\}$.
2. Réciproquement, montrer que si P est un opérateur borné tel que $P^2 = P$ et $P^* = P$, alors P est la projection orthogonale sur un sous-espace fermé.
3. Montrer que si $\mathscr{S}$ est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert séparable $\mathscr{H}$, alors $\mathscr{S}$ est aussi un espace séparable.
4. Montrer que si P_1, P_2 sont deux projections orthogonales sur $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ respectivement, alors P_1P_2 est une projection orthogonale si et seulement si $P_1P_2 = P_2P_1$, et dans ce cas P_1P_2 est la projection sur l'espace $\mathscr{S}_1 \cap \mathscr{S}_2$.

Exercice 5 – ***Norme et adjoint d'un opérateur***. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, et soit $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ une application linéaire continue. Rappelons que

$$\|T\| = \sup\left\{\|Tx\| \,:\, \|x\| \leq 1\right\} .$$

1. Montrer que $\|T\| = \sup\left\{|\langle Tx \mid y \rangle| \,:\, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\right\}$.
2. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $T^* : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, appelée *adjoint* de T, vérifiant

   $$\forall x, y \in \mathscr{H}, \quad \langle Tx \mid y \rangle = \langle x \mid T^* y \rangle .$$

   Montrer que de plus T^* vérifie $(T^*)^* = T$ puis $\|T^*\| = \|T\|$.
3. Supposons que $\mathscr{H} \neq \{0\}$ et que $T^* = T$ (on dit dans ce cas que T est *symétrique*). Montrer que

   $$\|T\| = \sup\left\{|\langle Tx \mid x \rangle| \,:\, \|x\| = 1\right\} .$$

Exercice 6 – ***Opérateur de Hilbert–Schmidt***. On se donne $K \in L^2\Big((\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2), \lambda_2),\ (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)\Big)$ et pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $x \in \mathbb{R}$, on définit lorsque cela à un sens

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y .$$

1. Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer que Tf est définie presque partout, *i.e.* que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ l'application $y \mapsto K(x, y)\, f(y)$ est intégrable.
2. En déduire que $T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ est bien définie, linéaire continue, et que $\|T\| \leq \|K\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

*L'application T est l'**opérateur de Hilbert–Schmidt de noyau** K.*

3. Montrer que l'adjoint T^* de T est l'opérateur de Hilbert–Schmidt de noyau $(x, y) \mapsto \overline{K(y, x)}$.

*Remarque : Il est possible de généraliser l'opérateur T dans d'autres contextes (autres espaces de fonctions, autres hypothèses sur K, ...), on parle alors d'**opérateur intégral**.*

Exercice 7 – ***Inégalité de Bessel***. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\geq 1}$ une famille orthonormée de $\mathscr{H}$.

1. Montrer que pour $x \in \mathscr{H}$, la famille $(\langle e_n | x \rangle^2)_{n \geq 1}$ est sommable et vérifie

$$\sum_{n\geq 1} \langle e_n | x \rangle^2 \leq \|x\|^2.$$

2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si x appartient à l'adhérence de $\mathrm{Vect}\{e_n |\, n \geq 1\}$.