Fubini & convolution

Exercice 1 – ***Un petit exercice pour commencer***. Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $f \in L^p(\mathbb{R})$. Pour $h > 0$, on définit

$$f_h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

1. Montrer que f_h est bien définie et continue.
2. Montrer que $f_h \in L^p(\mathbb{R})$ et $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.
3. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \|f_h - f\|_p = 0$.

Exercice 2 – ***Une égalité pratique***. 1. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini. Soient $f : X \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable, et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que

$$\int_X g \circ f \,\mathrm{d}\mu = \int_0^{+\infty} g'(t)\mu(\{f \geq t\})\,\mathrm{d}t\,.$$

2. En déduire une formule pour $\int_X |f(x)|^p d\mu(x)$, où $p > 0$.

Exercice 3 – ***Inégalité FKG***. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$. Soient $f, g \in L^1(\mu)$ deux fonctions positives telles que $fg \in L^1(\mu)$ et f, g sont monotones de même monotonie. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} fg\,\mathrm{d}\mu \geq \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\mu \int_{\mathbb{R}} g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Indication : On pourra considérer la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$.

Exercice 4 – ***Intégration par parties***. 1. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions boréliennes, localement intégrables (on note $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \lambda)$), ce qui signifie que si $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est un intervalle borné alors $\int_{[a,b]} |f| d\lambda$, $\int_{[a,b]} |g| d\lambda < +\infty$. On peut alors définir les primitives de ces fonctions, on définit :

$$F(x) := \int_0^x f d\lambda := \begin{cases} \int_{]0,x]} f d\lambda & \text{si } x \geq 0 \\ -\int_{[x,0[} f d\lambda & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et de même $G(x) := \int_0^x g d\lambda$. On rappelle que F et G sont des fonctions continues. On fixe maintenant $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné. Montrer que :

$$\int_a^b f(x)G(x)dx = [FG]_a^b - \int_a^b g(t)F(t)dt$$

où $[FG]_a^b := F(b)G(b) - F(a)G(a)$.

2. *(Pour aller plus loin)* Soit $F, G : [0, 1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes et càdlàg (continue à droite et admettant une limite à gauche en tout point). En notant $\Delta F(x) = F(x) - F(x^-)$, montrer que

$$F(1)G(1) - F(0)G(0) = \int_{]0,1]} F(x^-)\,\mathrm{d}G(x) + \int_{]0,1]} G(x^-)\,\mathrm{d}F(x) + \sum_{x \in]0,1]} \Delta F(x)\Delta G(x)\,.$$

où dF et dG sont respectivement les mesures de Stieljes associées à F et G.

Exercice 5 – ***Des calculs d'intégrales***. 1. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ en considérant $f : (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$.

2. Soient $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction λ-intégrable et $F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\forall a > 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{F(ax) - F(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(a) \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 6 – ***Intégrale de Dirichlet.*** 1. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

est convergente mais pas absolument convergente.

2. Pour $t \geq 0$, on pose $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, \mathrm{d}x$. Calculer $F(t)$ pour $t > 0$, en remarquant que $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy)\, \mathrm{d}y$ pour $x > 0$.
3. Montrer que F est continue en 0, et en déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 7 – ***Convolution & Dérivée.*** Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Soient $\varphi \in \mathscr{C}_c^n(\mathbb{R}^d)$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ (f est intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}^d$). Montrer que $\varphi * f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}^d)$ et que l'on a pour tout multiindice α d'ordre au plus n :

$$\partial^\alpha(\varphi * f) = (\partial^\alpha \varphi) * f\,.$$

2. Soient $\varphi \in \mathscr{C}_b^n(\mathbb{R}^d)$ (φ et ses dérivées d'ordres inférieurs à n sont bornées) et $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors on a le même résultat qu'à la question 1.

Exercice 8 – ***Convolution de mesures.*** Soient μ et ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^d$ et $s : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $(x, y) \mapsto x + y$ l'application somme. On pose $\mu * \nu(A) = \mu \otimes \nu(s^{-1}(A))$ pour tout borélien A.

1. Montrer que $\mu * \nu$ est une mesure borélienne. Si μ et ν sont finies sur les compacts, l'est-elle également ?
   La mesure $\mu * \nu$ est appelée *convolée* de μ et ν.
2. Montrer que

$$\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d), \quad \mu * \nu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mu(A - t)\, \nu(\mathrm{d}t) = \int_{\mathbb{R}^d} \nu(A - t)\, \mu(\mathrm{d}t)\,.$$

3. Soit g une fonction borélienne positive. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t)\, \mu * \nu(\mathrm{d}t) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} g \circ s(x, y)\ \mu \otimes \nu(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\,.$$

4. Montrer que l'opérateur de convolution est commutatif et associatif sur l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité. Montrer que la mesure de Dirac en 0 est un élément neutre pour $*$.
   Remarque : L'idée des approximations de l'unité est justement de s'approcher de la mesure de Dirac en 0.
5. La *mesure de probabilité de Poisson* π_λ de paramètre $\lambda > 0$ est définie par

$$\pi_\lambda = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \delta_n\,.$$

   Vérifier que π_λ définie bien une mesure puis calculer $\pi_\lambda * \pi_\mu$ pour $\lambda, \mu > 0$.

Exercice 9 – ***Convolution & Indicatrices.*** 1. Soient A et B deux parties mesurables de $\mathbb{R}^d$, de mesure finie non nulle. Montrer que la convolée de leurs fonctions caractéristiques est une fonction continue non nulle. En déduire que $A + B$ contient une boule non triviale.

2. On définit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x - y \notin \mathbb{Q}\}$. Montrer que E ne contient pas d'ensemble $A \times B$ où A et B sont deux ensembles mesurables tels que $\lambda(A), \lambda(B) > 0$.
   Indication : On pourra commencer par montrer que $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A(x + y)\mathbb{1}_B(y)\, \mathrm{d}y$ est continue et telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mathrm{d}x > 0$.
3. (a) Soient $f, g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}_+$ deux fonctions boréliennes positives. Montrer que $f * g$ est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que les ensembles $\{f * g \leq M\}$ pour $M \in \mathbb{R}$ sont des fermés.
   (b) En déduire le *théorème de Steinhaus* : si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue positive, alors $A - A = \{x - y \,:\, x, y \in A\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.