Changements de variables

Exercice 1 – ***Mesure sur la sphère***. On note λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \,:\, \|x\|_2 = 1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^d$, et on définit pour $A \in \mathscr{B}(\mathbb{S}^{d-1})$:

$$\gamma(A) = \{rx \,:\, r \in [0,1], x \in A\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad \sigma_d(A) = d\lambda_d(\gamma(A))\,.$$

1. Montrer que σ_d est une mesure positive finie sur $\mathscr{B}(\mathbb{S}^{d-1})$.
2. On rappelle qu'une isométrie est une fonction linéaire $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant $\|\varphi(x)\| = \|x\|$. Montrer que pour toute isométrie φ, on a $\varphi_*\sigma_d = \sigma_d$.
   Indication : On pourra commencer par montrer que $\varphi_*\lambda_d = \lambda_d$. Rappel : On dit que $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie lorsque φ est linéaire et $\|\varphi(x)\| = \|x\|$.
3. On note $T : [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{S}^1$ l'application bijective $T(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et λ la restriction de la mesure de Lebesgue à $[0, 2\pi)$, montrer que $\sigma_2 = T_*\lambda$.
4. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-1}} f(rz) r^{d-1}\,(\lambda \otimes \sigma_d)(\mathrm{d}r, \mathrm{d}z)\,.$$

   Indication : Commencer par le cas où $f = \mathbb{1}_B$ avec $B = \{rz \in \mathbb{R}^d \,:\, z \in A,\ a < r \leq b\}$ pour un $A \in \mathscr{B}(\mathbb{S}^{d-1})$ et $0 < a < b$.
5. Que donne cette formule si f est *radiale*, *i.e.* s'il existe $f_0 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $f = f_0(\|\cdot\|)$?

Exercice 2 – ***Gaussiennes et volume de la boule unité***. On rappelle que la fonction Γ est définie pour tout $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,\mathrm{d}x.$$

1. Calculer $\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.
   Indication : On pourra élever cette quantité au carré.
2. Soit B_d la boule euclidienne de rayon 1 centrée en 0, montrer que

$$\lambda_d(B_d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)}.$$

   Indication : On pourra calculer $\left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x\right)^d$ de deux façons différentes.

Exercice 3 – ***Changement de variable de Pólya***. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\gamma > 0$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f\Big(x - \frac{\gamma}{x}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exercice 4 – ***Transformée de Fourier de la loi de Cauchy***. On considère les fonctions de densité suivantes :

$$f_N : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad f_C : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \end{array}.$$

Remarque : f_N est la densité de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$ tandis que f_C est la densité de la loi de Cauchy standard $\mathscr{C}(0,1)$ (par rapport à la mesure de Lebesgue λ).

1. Montrer que pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue à support compact, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} g\Big(\frac{u}{v}\Big) f_N(u) f_N(v)\,\mathrm{d}\lambda_2(u, v) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_C(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

2. Calculer $\Phi_N(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} f_N(u)\,\mathrm{d}u$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. En déduire $\Phi_C(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_C(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 – ***Des calculs explicites***. On considère les ouverts de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x^2 + 4y^2 < 4, x > 0, y > 0\}\,, \qquad G = \{(x,y) \in \Omega \,:\, y < x\}\,,$$
$$\Omega' = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \,:\, 1 < x' < 4, y' > 0\}\,, \qquad G' = \{(x',y') \in \Omega' \,:\, y' < 1\}\,,$$

et on introduit la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{x^2-4y^2}{4x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer qu'il existe un difféomorphisme T de Ω dans Ω' qui envoie G sur G'.
2. Montrer que f est mesurable, intégrable sur G et calculer son intégrale.
3. f est-elle intégrable sur Ω ?

Exercice 6 – ***Calculer « simplement »*** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$. On pose $\Omega_a =]0,a[\times]0,+\infty[$ où $a > 0$ et on considère la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{\sin(u)}{u} e^{-v} & \text{si } u \neq 0 \\ e^{-v} & \text{sinon .} \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est intégrable sur Ω_a.
2. Montrer que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto (x, xy)$ est un difféomorphisme sur Ω_a.
3. Calculer $\int_0^a \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 – ***Changement de variables sphérique***. On se place dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme euclidienne. Pour quels réels α les fonctions $\|\cdot\|^\alpha \mathbb{1}_{\mathscr{B}(0,1)}$ et $\|\cdot\|^\alpha \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \mathscr{B}(0,1)}$ sont-elles intégrables ?