Mesures $\mathbb{C}$omplexes, Théorème de Radon-Nikodym & Décomposition de Lebesgue

Exercice 1 – . Soit μ une mesure positive non nulle sur $[0, 2\pi]$. Soit :

$$\begin{aligned} H : [0,2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\longmapsto (\cos(\theta), \sin(\theta)) \end{aligned}$$

La mesure $\nu = \mu(H^{-1}(\cdot))$ peut-elle être à densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2 – ***Quantification de l'absolue continuité***. 1. Supposons que μ et ν soient deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, la mesure μ étant positive et ν étant une mesure complexe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $\nu \ll \mu$,

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathscr{A}$ avec $\mu(A) < \delta$ on a $|\nu(A)| < \varepsilon$.

2. Que se passe-t-il si ν est maintenant une mesure positive ?

Exercice 3 – ***Un contre-exemple***. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue λ est absolument continue par rapport à la mesure μ.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot \mu$.
3. Conclure.

Exercice 4 – ***Décomposition des mesures finies***. On note λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}((\mathbb{R}))$. On se propose de montrer le résultat suivant :

Soit μ une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}((\mathbb{R}))$. Alors, il existe trois mesures boréliennes μ_{ac}, μ_δ et μ_{sc} telles que :

$$\begin{aligned} &\mu = \mu_{ac} + \mu_\delta + \mu_{sc} \\ &\mu_{ac} \ll \lambda, \quad \mu_\delta = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \delta_{a_k} \ \text{ avec } \alpha_k > 0 \text{ et } a_k \in \mathbb{R} \\ &\mu_{sc} \perp \lambda, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \mu_{sc}(\{x\}) = 0 \ \text{ (c'est-à-dire } \mu_{sc} \text{ est sans atome)} \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que l'ensemble $D = \{a \in \mathbb{R} \ : \ \mu(\{a\}) > 0\}$ est dénombrable.

   (b) On pose $\mu_\delta(A) = \mu(A \cap D)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Montrer que μ_δ est une mesure sur X, et que de plus
$$\mu_\delta = \sum_{a \in D} \mu(\{a\}) \delta_a \, .$$

   (c) En déduire qu'il existe une mesure borélienne sans atome ν sur X telle que $\mu = \nu + \mu_\delta$.

2. Conclure.

Exercice 5 – ***Espace des mesures signées***. 1. Montrer que $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ l'espace des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\| : \mu \mapsto |\mu|(\mathbb{R})$.

2. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in L^1(X, \mathscr{A}, \nu)$, on a $\|f\|_1 = \|f \cdot \nu\|$ où $\|\cdot\| : \mu \mapsto |\mu|(X)$.

Exercice 6 – ***Mesure complexe***. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : X \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de $\mathbb{L}^1(\mu)$.

1. Montrer que l'application $\nu : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$ définie pour tout $A \in \mathscr{A}$ par
$$\nu(A) = \int_A f \, \mathrm{d}\mu$$
définie une mesure complexe.

2. Montrer qu'il existe une fonction mesurable $h : X \to \mathbb{C}$ telle que $|h(x)|^2 = 1$ $|\nu|$–presque partout, et telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$,
$$\nu(A) = \int_A h \, \mathrm{d}|\nu|.$$
Indication : On pourra utiliser le résultat du lemme des moyennes (voir Exercice 2 du TD 5).

3. En déduire que pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a
$$|\nu|(A) = \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Exercice 7 – ***La décomposition de Jordan est minimale***. Soit μ une mesure réelle sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$. On rappelle que la *décomposition de Jordan* de μ est donnée par
$$\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2} \qquad \text{et} \qquad \mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

1. Montrer qu'il existe $\{A^+, A^-\}$ une partition de X composée d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que $\mu^\pm$ est portée par $A^\pm$ et
$$\forall E \in \mathscr{A}, \quad \mu^\pm(E) = \pm\mu(E \cap A^\pm).$$

2. Montrer que la décomposition de Jordan est minimale au sens que si μ_1 et μ_2 sont deux mesures positives bornées telles que $\mu = \mu_1 - \mu_2$, alors $\mu_1 \geq \mu^+$ et $\mu_2 \geq \mu^-$.

Exercice 8 – ***Mesure complexe et partition finie***. Soit μ une mesure complexe sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$. Montrer que
$$\forall E \in \mathscr{A}, \quad |\mu|(E) = \sup\left\{\sum_{k=1}^n |\mu(E_k)| \;:\; (E_k)_{1\leq k\leq n} \text{ partition finie de } E\right\}.$$

$_{1\leq k\leq n}$ sont 2 à 2 disjoints, on a
$$|\mu|(E) \leq \lambda\left(\bigcup_{1\leq k\leq n} E_k\right) + \varepsilon \leq \lambda(E) + \varepsilon.$$
En faisant $\varepsilon \to 0$, on obtient le résultat souhaité.