Colles Semaine 10 – 8 Décembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Munsch Laurane

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème : "Variable aléatoire à densité".

Exercice

1) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice identité.

a) Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est liée.

On se donne donc une famille de coefficients $(\lambda_i)_{i \in \{0, \dots, n^2\}}$ telle que $\sum_{i=0}^{n^2} A^i = 0$.

b) Démontrer que l'inverse de A est un polynôme en A , c'est à dire qu'il existe un polynôme P_A tel que $A^{-1} = P_A(A)$. On pourra commencer par le cas où $\lambda_0 \neq 0$.

2) Dans la question précédente, on a donc montré que pour toute matrice inversible, A^{-1} s'écrit sous la forme d'un polynôme en A , mais ce polynôme dépend à priori de la matrice A . Dans cette question, on suppose maintenant qu'il existe un polynôme P tel que **pour toute matrice** A inversible $A^{-1} = P(A)$. On pose Q le polynôme : $Q(X) = XP(X) - 1$.

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $Q(\lambda) = 0$.

Indication : On pourra s'intéresser à la matrice λI_n

b) Conclusion ?

Sujet 2 - Gattellaro Elisa

Question courte

Etudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t^2} dt$$

Exercice

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B = {}^tAA$.

1) Soit Y un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que ${}^tYY = 0 \iff Y = 0$.

2) Soit Y un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $BY = 0 \iff AY = 0$.

3) En déduire que $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tAA)$.

4) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est de rang 1, puis calculer A^2 .
Conclusion ?

Sujet 3 - Crunchant Romain

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on rappelle les notations $f^0 = \text{Id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit p un entier naturel non nul. On dit qu'un endomorphisme f de E est cyclique d'ordre p s'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f^p(x_0) = x_0$, et tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ soit génératrice de E et composée d'éléments deux à deux distincts. Dans ce cas, la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est appelée un cycle de f .

Dans tout l'exercice, on se donne f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p et $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f . L'objectif est d'étudier certaines propriétés de f .

0) Justifier rapidement l'appellation "cycle" de f .

- 1) Montrer que $p \geq n$.
 - 2) a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^p(f^k(x_0)) = f^k(x_0)$.
 - b) En déduire que $f^p = \text{Id}$, puis que f est un automorphisme de E .
 - 3) Démontrer que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(\text{Id} + f + \dots + f^{p-1})$ sont supplémentaires.
- Indication : On pourra utiliser un raisonnement par analyse-synthèse.*

Sujet 4 - Benhayoun William

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto (PQ)^{(n)} \end{aligned}$$

où $(PQ)^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième du produit de P par Q .

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) a) Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure.
- b) Que dire si on suppose de plus $d < n$?

Sujet 5 - Saye-Hoc Barnaud Gabriel

L'objectif de cet exercice est de trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = 0$.

Soit A une matrice telle que $A^2 = 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

- 1) a) Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- b) Soit r le rang de A (qui est aussi le rang de f). Montrer que $r \leq n/2$.
- 2) a) Que dire à propos de A si $r = 0$?
- b) On suppose à présent que $r > 0$. On se donne une base de $\text{Im}(f)$ que l'on note $(e_1, \dots, e_r)$.

Construire à partir de cette base une base B dans laquelle f a pour matrice la matrice par blocs :

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } I_r \text{ désigne la matrice identité de } \mathcal{M}_r(\mathbb{R}).$$

On a donc montré que A est semblable à la matrice M_r avec $r = \text{rang}(A)$.

- 3) Réciproquement, si A est semblable à M_r , calculer A^2 .
- 4) Conclure.

Sujet 6 - Monange Stanislas

Exercice 1

Déterminer, selon les valeurs des réels a et b , le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ .

- 1) Rappeler une densité de X .
- 2) Déterminer une densité de $X + Y$. (On pourra considérer deux cas).
- 3) Calculer $\mathbb{E}[X + Y]$.