Colles Semaine 12 – 5 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Benhamel Solon

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et f un endomorphisme de E .

- 1) a) Montrer que $\dim(\text{Im}(f)) - \dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f)) - \dim(\text{Ker}(f^2))$.
- b) En déduire que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ si et seulement si $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.
- 2) a) On note $\hat{f}$ la restriction de f à $\text{Im}f : \hat{f} : \text{Im}f \rightarrow E$. En utilisant $\hat{f}$, montrer que :

$$\dim(\text{Im}(f)) - \dim(\text{Im}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f))$$

- b) Montrer que $\text{Im}(f) = \text{Im}(f^2)$ si et seulement si $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Sujet 2 - Cau Elisa

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E = \mathbb{R}_p[X]$. Soit Δ l'application définie sur E par :

$$\forall P \in E, \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

- 1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
- 2) Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de E . Montrer que la matrice M de Δ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
- 3) a) Montrer que $\text{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
- b) Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$.
- 4) Démontrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in E$ tel que :

$$\Delta(Q) = pX^{p-1} \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)dt = 0$$

Sujet 3 - Lemaire Olivier

Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$.

- 1) a) Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.
- b) Montrer que $\text{rang}(u) = 1$ et $\dim(\text{Ker}(u)) = 2$.
- 2) Soit $e_1 \notin \text{Ker}(u)$ non nul. On pose $e_2 = u(e_1)$, et on prend e_3 tel que (e_2, e_3) forme une base de $\text{Ker}(u)$.
 - a) Justifier soigneusement la construction précédente des vecteurs e_1, e_2 et e_3 .
 - b) Démontrer que (e_1, e_2, e_3) forme une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}$.
 - c) Calculer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

Sujet 4 - Libé Léo

Exercice 1

Etudier, selon les valeurs des réels a, b et c , et avec un minimum de calculs, le rang de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi exponentielle de paramètre λ .

- 1) Rappeler la densité de X et Y .
- 2) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-Y$.
- 3) Démontrer que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Sujet 5 - Vieille Apolline

Soit u un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

- 1) a) Soit $x \in E$. Montrer que, si $x = y + z$, avec $y \in \text{Ker}(u)$ et $z \in \text{ker}(u^2 + \text{Id})$, alors $y = x + u^2(x)$ et $z = -u^2(x)$.
- b) En déduire que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$.
- 2) a) Montrer que $\dim(\text{Ker}(u^2 + \text{Id})) \geq 1$.
- b) Soit $x \in \text{Ker}(u^2 + \text{Id})$ non nul. Montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(u^2 + \text{Id})$.
- 3) On admet que $\dim(\text{Ker}(u^2 + \text{Id})) = 2$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sujet 6 - Narod Tareq

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que $f^3 = \text{Id}$.

- 1) a) Si $x \in E$ s'écrit $x = y + z$, avec $y \in \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $z \in \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$, montrer que :

$$y = \frac{1}{3}(x + f(x) + f^2(x))$$

- b) En déduire que $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$ sont supplémentaires.
- 2) On cherche à présent à déterminer tous les sous-espaces stables de f . Soit F un sous-espace stable de f . On définit F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E par :

$$F_1 = F \cap \text{Ker}(f - \text{Id}) \quad \text{et} \quad F_2 = F \cap \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$$

Démontrer que $F = F_1 \oplus F_2$. On s'est ainsi ramené à étudier F_1 et F_2 .

- 3) Démontrer que F_1 est stable par f .
- 4) a) On suppose dans cette sous-question seulement que F_2 n'est pas réduit à $\{0\}$. Soit $x \in F_2$ non nul. Montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de E , et que $\text{Vect}(x, f(x))$ est stable par f .
- b) Démontrer que, soit F_2 est réduit à $\{0\}$, soit F_2 est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme $\text{Vect}(x_i, f(x_i))$, avec $x_i \in F_2$ non nuls.

Indication : On pourra démontrer une propriété par récurrence sur la dimension du sous-espace considéré, et utiliser un supplémentaire bien choisi. La propriété utilisée devra être formulée soigneusement.

- 5) Dédurre des questions 3) et 4) la forme nécessaire d'un sous-espace stable de f . Démontrer que votre condition est une condition suffisante.