Colles Semaine 13, Groupe 5 – 13 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Penin Bruno

Soient $X_1, \dots X_m$ m variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1, \dots n\}$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1, \dots, X_m)$.

1) a) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq k)$ pour $k \in \{1, \dots n\}$.

b) En déduire la loi de Y.

2) a) Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y \geq k)$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^m$.

c) Calculer $\lim\limits_{m \to +\infty} \mathbb{E}(Y)$.

d) Donner une interprétation qualitative de ce résultat.

Sujet 2 - Ruaud Hugo

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On connaît la loi de probabilité du couple (X, Y) :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X,Y) = (i,j)) = p^2 q^{i+j}$$

où p et q sont deux réels de $]0,1[$ tels que $p + q = 1$.

1) a) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y). Que remarquez-vous ?

b) Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

2) Soit U la variable aléatoire $\max(X, Y)$.

a) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(U \leq k)$

b) En déduire la loi de U.

3) Démontrer que pour tout entier naturel k, $\mathbb{P}(X + Y = k) = (k+1)p^2 q^k$.

4) **Question finale surprise.** Revoir les probabilités conditionelles et la formule des probabilités totales.

Sujet 3 - Larhlid Kenza

Un joueur lance un dé équilibré à 6 faces. Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir une fois (respectivement 2 fois) le chiffre 3.

1) a) Donner sans calcul la loi de probabilité de X et celle de Y. Justifier.

b) Soit k un entier naturel non nul. Donner, sans calcul, la loi conditionnelle sachant $(X = k)$ de Y. Justifier.

c) Déterminer la loi du couple (X, Y).

d) Soit $n \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle sachant $(Y = n)$ de X.

2) Soit m un entier naturel non nul. Déterminer la loi de $Z = \min(X, m)$.