Colles Semaine 14 – 19 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Auduc Quentin

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème : "Somme de variables aléatoires".

Exercice

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose u l'application qui à tout polynôme $P \in E$ associe le polynôme Q défini par $Q(X) = P(\frac{X+1}{2})$.

1) Montrer que u est un endomorphisme de E.

2) Montrer que la matrice de u dans la base canonique de E est triangulaire supérieure, et donner les valeurs se trouvant sur la diagonale. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

3) a) Montrer que la famille $((X-1)^k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est une base de E.

b) En déduire les sous-espaces propres de u.

Sujet 2 - Caline Lucie

Vous aurez un exercice sans préparation sur les chapitres de probabilités. Révisez particulièrement les lois usuelles, ainsi que les notions de support et d'espérance d'une variable aléatoire.

Sujet 3 - Guillaud Solène

1) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer sans calcul les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B^p = A$.

2) Soit f et g deux endomorphismes de E un espace vectoriel. On suppose que f et g commutent, c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que les sous-espaces propres de f sont stables par g.

3) On pose maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. On veut montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = A$. On raisonne alors par l'absurbe : supposons qu'il existe une telle matrice, que l'on note encore B.

a) En utilisant la question précédente, montrer que nécessairement B est une matrice diagonale.

b) En cherchant des relations que doivent vérifier les coefficients diagonaux de B, vérifier que l'on aboutit à une contradiction.

Sujet 4 - Gallet Corentin

Vous aurez un sujet sans préparation. Révisez particulièrement les méthodes de détermination des valeurs propres, et les méthodes usuelles en probabilité discrète et continue.

Sujet 5 - Lamy Alexandre

Vous aurez un sujet sans préparation. Révisez particulièrement les méthodes de détermination des valeurs propres, et les méthodes usuelles en probabilité discrète et continue.

Sujet 6 - Santander Romain

Vous aurez un sujet sans préparation. Révisez particulièrement les méthodes de détermination des valeurs propres, et les méthodes usuelles en probabilité discrète et continue.