

Colles Semaine 15 – 26 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 – Munsch Laurane

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, et on pose l'application f définie sur E par $f(P) = P - P'$.

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E .
- 3) a) Déterminer les valeurs propres de f .
b) f est-il bijectif? Justifier.
c) f est-il diagonalisable? Justifier.

Sujet 2 – Gattellaro Elisa

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) a) Calculer A^2 , puis donner un polynôme annulateur de A .
b) Quelles informations en déduisez-vous sur le spectre de A ?
- 2) a) Calculer le rang de A , puis le rang de $A - 3I_3$.
b) La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.
- 3) **Question bonus** : Réviser particulièrement la caractérisation des endomorphismes diagonalisables.

Sujet 3 – Crunchant Romain

Vous aurez un exercice à préparer en 20 minutes sur le thème de la réduction des endomorphismes. Réviser particulièrement les polynômes d'endomorphismes et leurs liens avec la réduction des endomorphismes, ainsi que la notion de trace d'une matrice.

Sujet 4 – Benhayoun William

Vous aurez un exercice à préparer en 20 minutes sur le thème de la réduction des endomorphismes. Réviser particulièrement les polynômes d'endomorphismes et leurs liens avec la réduction des endomorphismes, ainsi que la notion de trace d'une matrice.

Sujet 5 – Saye-Hoc Barnaud Gabriel

Vous aurez un exercice à préparer en 20 minutes sur le thème de la réduction des endomorphismes. Réviser particulièrement le point de vue matriciel de la réduction des endomorphismes, ainsi que la notion de trace d'une matrice.

Sujet 6 – Monange Stanislas

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

- 1) a) Calculer A^2 , puis A^3 . En déduire un polynôme annulateur de f .

- b) Déterminer les valeurs propres de f .
- c) f est-il diagonalisable ?
- 2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 3) a) Démontrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

On souhaite montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$. Supposons pour cela l'existence d'un tel endomorphisme.

- b) Démontrer que g et f commutent.
- c) Démontrer que $\text{Ker}(f^2)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id})$ sont stables par g . En déduire que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ de la question 2 est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

- d) En utilisant la matrice T , obtenir une contradiction.