Colles Semaine 16 – 2 Février

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 – Simeon Jean-Baptiste

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A . Montrer que A est diagonalisable.
 - 2) On écrit donc $A = PDP^{-1}$, où D est une matrice diagonale. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$. L'objectif de cette question est de déterminer un polynôme annulateur de M . On notera $M' = PMP^{-1}$.
 - a) Montrer que M et A commutent. En déduire que M' et D commutent.
 - b) En déduire que M' est une matrice diagonale.
 - c) Démontrer que $M'^2 + M' = D$. En déduire qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour M' , et expliciter ces possibilités. En déduire un polynôme annulateur de M' (i.e valable dans tous les cas précédents).
 - d) Si P est un polynôme annulateur de M' , démontrer que P est aussi un polynôme annulateur de M .
- Conclusion ?

Sujet 2 – Loucif Houceine

Vous aurez un exercice à préparer en 20 minutes sur le thème de la réduction des endomorphismes. Révisez particulièrement la caractérisation des valeurs propres et des vecteurs propres, ainsi que les polynômes d'endomorphismes et leurs liens avec la réduction.

Sujet 3 – Magnière Maxime

Vous aurez un exercice à préparer en 20 minutes sur le thème de la réduction des endomorphismes. Révisez particulièrement la caractérisation des valeurs propres et des vecteurs propres, ainsi que les restrictions l'endomorphismes et les liens avec la réduction.

Sujet 4 – Debizet Anouk

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 1) a) Calculer $A^2 - 4A$. En déduire un polynôme annulateur de A .
- b) Démontrer que A admet au plus une valeur propre. A est-elle diagonalisable ?
- 2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = n2^{n-1}A - (n-1)2^n I_3$.
- 3) a) Donner une base du sous-espace propre associé à la seule valeur propre de A .
- b) On complète cette base par le vecteur $u = e_1 + e_2 + e_3$, où (e_1, e_2, e_3) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Démontrer que l'on obtient une base de $\mathbb{R}^3$, puis exprimer la matrice de l'endomorphisme associé à A dans cette nouvelle base.

Sujet 5 – Ebondza Hélène

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A .

- 1) a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A .
- b) La matrice A est-elle diagonalisable? Justifier.
- 2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3) a) Soit P un polynôme annulateur de A' . En utilisant le spectre de A' , démontrer que $(X - 1)(X - 3)$ divise A' . En déduire que A' n'admet pas de polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à 2.

- b) Déterminer un polynôme annulateur de A' .
- c) Démontrer que tout polynôme annulateur de A' est aussi annulateur de A .
- d) En déduire un polynôme annulateur de A , de degré minimal, et de coefficient dominant égal à 1.

Sujet 6 – Folliet Geoffrey

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs propres de A . A est-elle diagonalisable? Justifier.
- 2) a) Démontrer que $(X - 1)^2$ est un polynôme annulateur de A .
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = n(A - I_3) + I_3$.
- 3) a) Montrer que $\mathcal{B}$ est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Retrouver le résultat de la question 2b) d'une autre manière.