Colles Semaine 17 – 9 Février

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 – Auduc Quentin

Soit X une variable aléatoire qui admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(-x - e^{-x})$.

1) Vérifier que f est bien une densité, et calculer la fonction de répartition de X.

2) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On définit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de M_n.

b) En déduire la fonction de répartition la variable aléatoire $M_n - \ln(n)$.

c) Démontrer que la suite de variables aléatoires $(M_n - \ln(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X.

Sujet 2 – Caline Lucie

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $\{1, \ldots d\}$. On considère la variable aléatoire :

$$N_d = \min\{i \geq 1 \text{ tel que } U_i \in \{U_1, \ldots, U_{i-1}\}\}$$

1) a) Déterminer $N_d(\Omega)$.

b) Démontrer que pour tout n tel que $2 \leq n \leq d$, on a $\mathbb{P}(N_d > n) = (1 - \frac{1}{d}) \times \cdots \times (1 - \frac{n-1}{d})$.

2) On admet que pour tout $u > 0$, on a $\lim\limits_{d\to+\infty} \sum\limits_{i=0}^{\lfloor u\sqrt{d}\rfloor} \ln(1 - \frac{i}{d}) = -u^2$. (On rappelle que, pour $x \geq 0$, $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus petit entier inférieur ou égal à x). Montrer que la suite de variables aléatoires $(\frac{N_d}{\sqrt{d}})_{d>0}$ converge en loi vers une variable aléatoire à densité, dont on donnera une densité.

3) Le but de cette question est d'établir le résultat admis précédemment. Dans toute cette question, on se fixe $u > 0$.

a) Montrer que $\frac{1}{d} \sum\limits_{i=0}^{\lfloor u\sqrt{d}\rfloor} i$ tend vers $\frac{u^2}{2}$ quand d tend vers l'infini (on pourra utiliser un théorème d'encadrement).

b) Montrer qu'il existe une fonction $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, continue sur $[-1/2; 0]$, telle que pour tout $x \in [-1/2; 0]$, on a : $\ln(1 + x) = x + x^2 f(x)$.

c) On admet qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $d > 4u^2$ et $0 \leq i \leq \lfloor u\sqrt{d}\rfloor$ on a $|f(-i/d)| \leq M$. Démontrer le résultat admis en 2).

Sujet 3 – Guillaud Solène

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les variables aléatoires $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $X_n = n(1 - M_n)$.

1) a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire M_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Montrer que la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.

2) a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Sujet 4 – Beroard Gilles

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé, admettant toutes une espérance et une variance. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0$ et qu'il existe un réel m tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = m$.

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}((X_n - m)^2) = \mathrm{Var}(X_n) + (\mathbb{E}(X_n) - m)^2$.

b) Démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(|X_n - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(\mathrm{Var}(X_n) + (\mathbb{E}(X_n) - m)^2)$

c) En déduire que la suite (X_n) converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine m.

2) Application : On suppose dans cette question que les (X_n) sont en plus indépendantes, et suivent toutes une loi de Bernouilli de paramètre $p \in]0,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \exp(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i)$.

a) Calculer $\mathbb{E}(Y_n)$, puis $\mathrm{Var}(Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire leurs limites quand n tend vers l'infini.

b) Déduire des questions précédentes que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire certaine que l'on déterminera.

Sujet 5 – Blanchet Alice

Vous aurez un exercice à préparer en 20 minutes sur le thème de la convergence de variables aléatoires et des estimateurs. Révisez toutes les définitions, et plus particulièrement la convergence en probabilité.

Sujet 6 – Braun Loys

Vous aurez un exercice à préparer en 20 minutes sur le thème de la convergence de variables aléatoires et des estimateurs. Révisez plus particulièrement les notions et méthodes liées aux estimateurs.