Colles Semaine 18 – 16 Février

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 – Simeon Jean-Baptiste

1) Montrer que si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ diagonalisable, alors l'endomorphisme f^2 est aussi diagonalisable.

2) On étudie dans cette question la réciproque de ce résultat. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Calculer A^2, puis montrer que $A^4 = I_3$. En déduire les valeurs propres possibles de A.
b) Donner une base (u) de $\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id})$, puis déterminer $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$.
c) En déduire que g n'est pas diagonalisable.
d) Déterminer une base (v, w) de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{Id})$.
e) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer la matrice de g dans cette base. Conclusion ?

Sujet 2 – Loucif Houceine

Vous aurez un sujet à préparer en 20 minutes autour du thème de la convergence de variables aléatoires. Révisez particulièrement la convergence en loi.

Sujet 3 – Magnière Maxime

Vous aurez un sujet à préparer en 20 minutes autour du thème de la convergence de variables aléatoires. Révisez particulièrement les convergences en loi et en probabilité.

Sujet 4 – Libé Léo

Vous aurez un sujet à préparer en 20 minutes autour du thème des produits scalaires. Révisez de manière générale les définitions et propriétés principales du cours.

Sujet 5 – Vieille Apolline

Exercice court : la pratique

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. A l'aide du procédé de Gram-Schmidt, orthonormaliser la famille libre (u, v, w) où $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 1)$, et $w = (-1, 1, 0)$.

Exercice

Soit $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit w une fonction continue et strictement positive sur $]a, b[$, telle que l'intégrale $\int_a^b w(x)dx$ converge. Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, on note $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$.

1) Démontrer que l'on obtient ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

2) En utilisant le procédé de Gram-Schmidt, construire par récurrence une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant (i.e. du terme

de plus haut degré) égal à 1, et vérifiant $\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $(P_n, Q) = 0$. On donnera en particulier l'expression de P_n en fonction des P_k, où $0 \leq k < n$.

On pourra commencer par regarder le cas $n = 1$, pour ensuite généraliser.

Sujet 6 – Narod Tareq

Vous aurez un sujet à préparer en 20 minutes autour du thème de la convergence de variables aléatoires. Révisez particulièrement la convergence en loi.