Colles Semaine 2 – 29 Septembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Simeon Jean-Baptiste

Exercice court

Etudier, selon la valeur des réels a et b, la nature de la série de terme général :

$$e^{1/n} - a - \frac{b}{n}$$

Exercice : Caractérisation des isométries dans un préhilbertien réel

Soit E un espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit f une application de E dans lui-même telle que $f(0) = 0$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$. On dit que f est une isométrie (car elle conserve les distances).

1) Montrer que f conserve la norme, c'est-à-dire $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.
2) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.
3) Montrer que $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|f(\lambda x + y) - (\lambda f(x) + f(y))\| = 0$.
4) Conclusion ?

Sujet 2 - Loucif Houceine

Exercice court

Etudier la nature de la série de terme général :

$$\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n} + 1}$$

Exercice : un produit scalaire sur les matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n. On rappelle que c'est un espace vectoriel.

On pose, pour A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $(A|B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1) Démontrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur E.

2) On dit que A est symétrique (respectivement antisymétrique) si ${}^tA = A$ (respectivement ${}^tA = -A$). On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétrique).

Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

3) On note F l'ensemble des matrices diagonales de E.

a) Déterminer une base de F ainsi que sa dimension.

b) Déterminer $F^\perp$.

Sujet 3 - Magniere Maxime

Question courte

Au début de la colle, vous aurez une question courte autour du thème : "Propriétés et inégalités associées à un produit scalaire".

Exercice : Etude d'une suite à l'aide de séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{2n-1}\sum\limits_{j=1}^{n-1} u_j$.

1) Vérifier que $u_2 = 1/3$, puis calculer u_3.

2) On suppose par l'absurde que la série de terme général u_n converge.

a) Démontrer que la suite $\sum\limits_{j=1}^{n-1} u_j$ converge vers un réel S tel que $S > 0$.

b) Déterminer un équivalent de u_n en fonction de S, puis aboutir à une contradiction.

3) a) Démontrer que :

$$\forall n \geq 2, u_{n+1} = \frac{2n}{2n+1}u_n$$

En déduire que la suite u_n converge.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $\ln(\frac{u_n}{u_{n+1}})$ (on vérifiera au préalable que le terme général de cette série est bien défini).

c) En déduire la limite de u_n.

Sujet 4 - Libe Léo

Exercice 1 : Un produit scalaire

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P,Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2 : Etude d'une série

On s'intéresse dans cet exercice à la nature de la série $\sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln(k)}$.

1) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $\int\limits_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

2) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$.

3) En déduire la nature de la série.

Sujet 5 - Vieille Apolline

Exercice court

Etudier selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^a$.

Exercice : Endomorphisme qui conserve l'orthogonalité

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $(x,y) \in E^2$, si $(x|y) = 0$ alors $(f(x)|f(y)) = 0$.

1) Soient $i, j \in \{1, \ldots n\}^2$ avec $i \neq j$.

a) Démontrer que $e_i + e_j$ et $e_i - e_j$ sont orthogonaux.

b) En déduire que $f(e_i)$ et $f(e_j)$ ont même norme. On notera cette norme α.

2) Démontrer que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$.

Sujet 6 - Narod Tareq

Exercice court

Déterminer la nature de la série de terme général :

$$\frac{\ln(n)}{\ln(e^n - 1)}$$

Exercice : Autour des séries de Riemann

1) Rappeler pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2) Dans toute cette question, on se place dans le cas où $0 < \alpha < 1$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

a) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

b) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{(n+1)^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1 - \alpha}$$

d) En déduire un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

3) Comment adapter cette méthode pour le cas $\alpha = 1$? Le cas $\alpha < 0$?