

Colles Semaine 20 – 16 Mars

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 – Merry Lelia

Un automobiliste arrive dans une rue infiniment longue à sens unique au numéro 0. Il souhaite se rendre à un point d'arrivée situé au numéro $d \in \mathbb{N}$ de la rue et cherche à se garer au plus près possible de l'arrivée. On suppose que pour tout entier naturel n , il y a une place de parking au numéro n de la rue, mais celle-ci est libre avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On suppose de plus que les occupations des places se font indépendamment les unes des autres. La stratégie de l'automobiliste est la suivante : il se donne un entier $s \in \{0, \dots, d\}$, conduit sans s'arrêter jusqu'au numéro s , puis à partir du numéro s (inclus) il se stationne à la première place libre.

On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la place trouvée par cette méthode. La distance à l'arrivée est $|X - d|$ et l'espérance $D_s = \mathbb{E}(|X - d|)$ est la distance moyenne à l'arrivée, que l'on souhaite minimiser en choisissant bien s .

1) a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'événement "la place au numéro k est occupée". Pour $n \in X(\Omega)$, exprimer l'événement $(X = n)$ en fonction des A_k .

b) Déterminer la loi de $X - s + 1$. En déduire l'espérance de X .

2) a) Montrer que la variable aléatoire $|X - d|$ admet une espérance.

b) Montrer que $D_s = \sum_{n=s}^{+\infty} (n - d)\mathbb{P}(X = n) - 2 \sum_{n=s}^d (n - d)\mathbb{P}(X = n)$.

3) a) Donner, pour $x \neq 1$, la valeur de la somme $\sum_{k=0}^N x^k$ en fonction de N et x . En déduire une expression

de la somme $\sum_{k=0}^N kx^k$.

b) En déduire que $\sum_{n=s}^d (n - d)\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{p} + s - d - 1 - \frac{(1-p)^{d-s+1}}{p}$.

4) a) Déduire des questions précédentes que $D_s = d - s + 1 - \frac{1}{p} + \frac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

b) En simplifiant $D_{s+1} - D_s$, démontrer que D_s est minimale pour s le plus petit entier strictement supérieur à $d + \frac{\ln(2)}{\ln(1-p)}$. Que dire si $p \geq \frac{1}{2}$?

Sujet 2 – Meunier Zoé

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$$

1) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale :

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x) dx$$

est convergente, puis déterminer sa valeur en fonction de n .

b) Montrer que $I_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}$.

2) Montrer que la série de terme général $f(n)$ converge.

3) a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k)$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq I_n \leq f(n) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$$

- 4) Déterminer un équivalent simple, quand n tend vers l'infini, de la somme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{1/k}}{k^2}$

Sujet 3 – Sellem David-Anthony

Vous aurez un exercice sans préparation autour du thème des séries numériques. Révisez particulièrement les méthodes autour des preuves de convergence et de la convergence absolue.

Sujet 4 – Beroard Gilles

Vous aurez un exercice sans préparation autour du thème de la réduction des endomorphismes symétriques. Révisez particulièrement les définitions, caractérisations et propriétés des endomorphismes symétriques, ainsi que les méthodes vues dans le cours de réduction, notamment l'utilisation de bases de vecteurs propres.

Sujet 5 – Blanchet Alice

Vous aurez un exercice sans préparation sur les projecteurs. Révisez particulièrement les méthodes faisant appel à la décomposition dans une base de vecteurs propres, ainsi que la représentation matricielle des projecteurs.

Sujet 6 – Braun Loys

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. On considère l'application f qui, à tout polynôme P de E , associe le reste de la division euclidienne de $(1 - X + X^2)P$ par $1 + X^3$: ainsi, il existe un unique polynôme Q tel que :

$$(1 - X + X^2)P = (1 + X^3)Q + f(P), \text{ avec } \deg(f(P)) \leq 2$$

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2) a) Ecrire la matrice de f dans la base canonique de E . En déduire une base (u) de $\text{Im}(f)$.
b) Donner la dimension de $\text{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (v, w) de $\text{Ker}(f)$.
- 3) Démontrer que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(f - 3\text{Id})$. En déduire que (u, v, w) est une base de E , puis écrire la matrice de f dans cette base.
- 4) On considère l'application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(P, Q) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$, où on a noté $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2$.
a) Montrer que φ définit un produit scalaire sur E .
b) Montrer que $\text{Ker}(f)$ est le supplémentaire orthogonal de $\text{Im}(f)$ dans E pour ce produit scalaire.