Colles Semaine 21 – 23 Mars

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 – Benhamel Solon

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- 1) Déterminer les valeurs propres de A .
- 2) Montrer que A est diagonalisable, puis déterminer une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres pour A .
- 3) a) Donner la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base $\mathcal{B}$, que l'on notera P .
- b) Calculer P^{-1} .
- c) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 4) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 2y_n - z_n \\ y_{n+1} = 3x_n - 2y_n \\ z_{n+1} = z_n + 2(y_n - x_n) \end{cases}$$

Sujet 2 – Cau Elisa

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit f l'application qui a tout polynôme P de E associe $f(P) = ((X^2 - X)P)''$, où Q'' désigne la dérivée seconde du polynôme Q .

- 1) Montrer que f est un endomorphisme de E .
- 2) a) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E , que l'on notera A .
- b) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E .
- 3) a) Déterminer les valeurs propres de f . En déduire que f est diagonalisable.
- b) Déterminer les sous-espaces propres de f .
- 4) a) Montrer qu'il existe une matrice P inversible, et une matrice D diagonale, telle que $A = P^{-1}DP$.
- b) Donner alors une méthode pour calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sujet 3 – Lemaire Olivier

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ **non nul** tel que $f^3 + f = 0$.

On admet que f possède au moins une valeur propre réelle.

- 1) Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + id)$. (On pourra écrire, pour $x \in E$, $x = x + f^2(x) - f^2(x)$)
- 2) a) Montrer que $\dim(\text{Ker}(f^2 + id)) \geq 1$.
- b) Soit x un vecteur non nul de $\text{Ker}(f^2 + id)$. Montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + id)$.
- 3) Soit λ une valeur propre de f . Justifier que $\lambda^3 + \lambda = 0$. En déduire les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.
- 4) f est-il un automorphisme? Justifier.
- 5) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f admet pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sujet 4 – Debizet Anouk

1) Montrer la convergence de l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx$$

2) a) Démontrer, pour tout réel $x \in]0, 1[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\frac{\ln(x)}{1-x^2} = \sum_{k=0}^n x^{2k} \ln(x) + \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^2}$$

b) Montrer que pour tout entier naturel k l'intégrale $\int_0^1 x^{2k} \ln(x) dx$, puis exprimer en fonction de k la valeur de cette intégrale.

3) a) Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{x^2 \ln(x)}{1-x^2}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et en 1. En déduire que f est bornée sur $[0, 1]$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+2} \ln(x)}{1-x^2} dx$.

4) Déduire des questions précédentes que :

$$I = - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

5) On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer la valeur de I .

Sujet 5 – Ebondza Hélène

Soit U l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que $x > 0$ et $y > 0$. On définit une fonction f sur U par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

1) Montrer que f est de la classe C^1 sur U .

2) Calculer le gradient de f en tout point de U .

3) a) Montrer que (x, y) est un point critique si et seulement si X et y sont solution du système :

$$\begin{cases} 3(x+y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ x-y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = t - \frac{1}{t^2}$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que f admet un unique point critique dans U et déterminer ses coordonnées.

Sujet 6 – Folliet Geoffrey

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont donné le même côté de la pièce et le $(n+1)$ -ième l'autre côté. De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédent un changement de côté. On définit de la même manière les séries suivantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i -ème lancé donne pile" et F_i l'événement "le i -ème lancé donne face". On note N_n la variable aléatoire correspondant au nombre de séries lors des n premiers lancers.

Par exemple, si les lancers successifs donnent **PPFFFFPPF...** (**P** désignant pile et **F** face), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1, \quad N_3(\omega) = N_4(\omega) = N_5(\omega) = 2, \quad N_6(\omega) = N_7(\omega) = 3, \quad N_8(\omega) = 4$$

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, déterminer $N_n(\Omega)$, puis calculer $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.

2) On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [0, 1]$, la fonction génératrice de N_n :

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_n = k) s^k$$

a) Que représente $G'_n(1)$?

b) Démontrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$$

On admet que l'on peut démontrer la formule similaire :

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap P_{n-1})$$

c) Démontrer la formule :

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)$$

d) En déduire que $G_n(s) = \frac{1+s}{2} G_{n-1}(s)$, puis en calculant $G_1(s)$, démontrer :

$$G_n(s) = s \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1}$$

e) En utilisant 3a), déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.