

Colles Semaine 3 – 6 Octobre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Merry Lelia

Exercice courte

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = 1 - \cos(\frac{\pi}{\sqrt{n}})$.

Exercice : étude d'une densité

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X .
- 2) Calculer la fonction de répartition de X , notée F . Tracer sa courbe représentative.
- 3) Calculer l'espérance de X .

Sujet 2 - Meunier Zoé

Exercice : Etude d'une variable aléatoire

- 1) a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$ converge et donner sa valeur.
- b) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$. Démontrer que f est une densité de probabilité.
- 2) Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, admettant pour densité f . On note F sa fonction de répartition. On pose enfin $Y = \ln(1 + |X|)$, et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé.
- a) Déterminer $Y(\Omega)$.
- b) Exprimer la fonction de répartition de Y , que l'on notera G , en fonction de F .
- c) En déduire la loi de Y .

Sujet 3 - Sellem David-Anthony

Exercice : Etude d'un produit scalaire

On note $\mathcal{A}([0, +\infty[, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier, on rappelle que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On définit E comme étant l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ bornées, de classe C^1 , telles que $f(0) = 0$.

- 1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.
- 2) a) Montrer que, pour $f \in E$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$.
- b) En déduire que l'application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2} dx$ est bien définie.
- c) Montrer que φ définit en fait un produit scalaire sur E .
- 3) Démontrer que pour tout $(f, g) \in E^2$, $\varphi(f, g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x} dx$

Sujet 4 - Crunchant Romain

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème : "Propriétés des intégrales impropres".

Exercice : Etude d'ensembles de suites

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ telles que la série de terme général $n^2 u_n^2$ converge. On note F le sous-ensemble de E formé des suites pour lesquelles on a en plus $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n^2 \leq 1$.

- 1) On étudie dans cette question quelques exemples.
 - a) Soit a_n la suite définie par $a_n = \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'elle appartient à E . Appartient-elle à F ?
 - b) Soit b_n la suite définie par $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n(n+1)}}$. Montrer qu'elle appartient à E et à F .
 - c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/2$. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X . En déduire que la suite $c_n = \frac{1}{2^{n/2}}$ appartient à E et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n^2$.
- 2) On étudie maintenant quelques propriétés de E et F .
 - a) Montrer que si u et v sont deux suites de E , alors la série de terme général $n^2 u_n v_n$ converge absolument.
 - b) En déduire que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - c) F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
 - d) Montrer que l'application définie sur $E \times E$ par $\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n v_n$ définit un produit scalaire sur E .

Sujet 5 - Saye-Hoc Barnaud Gabriel

Exercice court

Etudier la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$$

Exercice - Des densités

- 1) Rappeler la densité, la fonction de répartition et l'espérance d'une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$.
A partir de maintenant, on considère U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2]$. Soit $X = \sqrt{U}$.
- 2) Calculer la fonction de répartition F_X de X .
- 3) Calculer la densité f_X de X .
- 4) Mêmes questions pour $Y = 1/U$.

Sujet 6 - Monange Stanislas

Exercice court

Etudier la nature de la série de terme général :

$$\frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$$

Exercice : des densités

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité.
- 2) Soit X une variable aléatoire de densité f .
 - a) Déterminer la fonction de répartition de X .
 - b) On pose $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y .
 - c) Mêmes questions pour $Z = e^{-Y}$.