Colles Semaine 4 – 13 Octobre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Benhamel Solon

Exercice court

Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$$

Exercice : un problème d'urnes

Soit p un réel tel que $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

On dispose d'une urne contenant des boules rouges en proportion p et des boules vertes en proportion q. On effectue dans cette urne une suite de tirages d'une boule **avec remise** jusqu'à ce que l'on obtienne une boule rouge. On suppose que les résultats des différents tirages sont indépendants.

On pose Z la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes obtenues avant l'apparition de la première boule rouge, et on pose $Z = -1$ si l'on obtient jamais de boule rouge.

1) a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}(Z = n) = pq^n$.

b) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z = n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Z = -1)$.

2) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z + 1$. Quelle loi reconnaissez-vous ?

b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z.

Sujet 2 - Cau Elisa

Exercice court

Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 + e^{-t})dt$$

Exercice : Une variable aléatoire

1) Donner la fonction de répartition d'une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre p. La représenter sur un graphique.

2) Soit Y une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre p. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose enfin $X = Y + Z$.

a) Calculer l'espérance de X.

b) Donner la fonction de distribution de X. La représenter sur un graphique.

Sujet 3 - Lemaire Olivier

Exercice : Calculs d'intégrales

1) a) Soit a un réel positif ou nul. Etablir la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

On note $\phi(a)$ sa valeur.

b) Justifier que :

$$\phi(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \sqrt{2\pi}$$

2) a) Calculer $\phi(1)$.
b) Montrer que pour tout $a \geq 0$: $\phi(a+2) = (a+1)\phi(a)$.
c) Pour tout entier naturel n et pour tout $a \geq 0$, exprimer $\phi(a+2n)$ en fonction de $\phi(a)$.
d) En déduire la valeur de $\phi(n)$ pour tout entier naturel n.

Sujet 4 - Folliet Geoffrey

Exercice : Un problème d'urnes

Toutes les variables aléatoires qui interviennent dans cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note a et b deux entiers naturels non nuls, et on pose $N = a + b$.

On considère une urne contenant initialement a boules noires et b boules blanches. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- Si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
- Si la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne, mais est remplacée dans cette urne par une boule blanche (prise dans une réserve annexe) avant de procéder au tirage suivant.

On considère les variables aléatoires suivantes :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est égale au nombre de boules noirées tirées lors des n premiers tirages.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, T_k est égale à 1 si une boule noire est tirée au $k-$ième tirage, et est égale à 0 sinon.

1) a) Déterminer la loi de T_1.
b) Déterminer la loi de T_2.
2) a) Exprimer X_n en fonction de $T_1, \dots, T_n$.
b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = 1) = \frac{a - \mathbb{E}(X_n)}{N}$$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\mathbb{P}(T_n = 1) = \frac{a(N-1)^{n-1}}{N^n}$$

Indication : On pourra procéder par récurrrence.
3) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Sujet 5 - Lamy Alexandre

Exercice : Etude d'une intégrale

1) a) Justifier que pour tout réel $a > 0$, l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} e^{-at}dt$ converge et donner sa valeur.
b) Démontrer **soigneusement** que la fonction f suivante est définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2t}\sqrt{1 + x^2e^{2t}}dt$$

2) a) Démontrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $t \geq 0$ on a :

$$xe^t \leq \sqrt{1 + x^2e^{2t}} \leq xe^t + \frac{e^{-t}}{2x}$$

b) En déduire un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Sujet 6 - Santander Romain

Exercice court

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = (\sin(1/n))^n$.

Exercice : Une densité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{a \ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer le réel a tel que f soit une densité de probabilité.
2) Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f
a) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
b) La variable aléatoire X^2 admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.