

Colles Semaine 5 – 3 Novembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Merry Lelia

- 1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + xe^t} dt$$

est convergente.

On peut alors poser f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + xe^t} dt$$

- 2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
 3) a) Démontrer que, pour tout $x > 0$:

$$f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{t}{xe^t} dt$$

- b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- c) Démontrer qu'il existe un réel $M > 0$ que l'on déterminera tel que pour tout $x > 0$:

$$f(x) - \frac{1}{x} \leq \frac{M}{x^2}$$

- d) Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Sujet 2 - Meunier Zoé

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.

- 1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente. On note I sa valeur.
 2) Trouver deux réels a et b tels que $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.
 3) En déduire la valeur de I .
 4) a) Déterminer pour quelles valeurs de n l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

Quand l'intégrale converge on note I_n sa valeur.

- b) Que vaut I_2 ?

- c) Démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Sujet 3 - Sellem David-Anthony

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi uniforme sur $]0, 1[$.

On pose $X = -\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right)$.

- 1) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer la densité de X .
 2) On pose Z la fonction définie sur Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } U(\omega) > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } U(\omega) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

- a) Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$.

- b) Montrer que $\forall x \in]0, \ln(\frac{3}{2})[, \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(U \leq \frac{1}{2}) + \mathbb{P}(U > \frac{1}{2} \text{ et } X \leq x)$.
- c) Que vaut $\mathbb{P}(Z \leq x)$ si $x \geq \ln(\frac{3}{2})$?
- d) En déduire la fonction de répartition de Z , que l'on notera F .
- e) Z est-elle une variable aléatoire à densité ? Justifier.

Sujet 4 - Penin Bruno

- 1) a) Etudier la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$ sur $[0, 1]$.
 - b) Soit $x \in [0, 1]$. Démontrer qu'il existe un unique réel dans $[0, 1]$ que l'on note $\theta(x)$ tel que $\sin(\pi\theta(x)) = x$.
 - c) On voit maintenant θ comme une fonction de x . On admet que cette fonction est de classe C^1 sur $[0, 1]$.
- En dérivant l'égalité $\sin(\pi\theta(x)) = x$, démontrer que pour tout $x \in [0, 1[$ on a :

$$\theta'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$$

2) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = \sin(\pi X)$. On admet que Y est une variable aléatoire. L'objectif de cette question est d'étudier la loi de Y . On pose F la fonction de répartition de Y .

- a) Calculer $F(x)$ si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.
- b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $F(x) = \mathbb{P}((0 \leq X \leq \theta(x)) \cup (1 - \theta(x) \leq X \leq 1))$ où $\theta(x)$ est défini à la question précédente. En déduire $F(x)$.
- c) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer la densité de Y .

Sujet 5 - Ruaud Hugo

Question courte

Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln(x)}{1+x^2} dx$$

Exercice : Une inégalité

Soit Z une variable aléatoire réelle, d'espérance nulle et de variance σ^2 .

- 1) Montrer que pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{P}((Z+x)^2 \geq (a+x)^2)$
- 2) Montrer que pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2 + x^2}{(a+x)^2}$
- 3) En choisissant judicieusement x , montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$

Sujet 6 - Larhlid Kenza

Question courte

Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Exercice : Des lois discrètes

Soit n un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Z_n qui est uniformément répartie sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

- 1) Montrer que Z_n admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Z_n]$.
- 2) Montrer que $\cos(\pi Z_n)$ admet une espérance et la calculer.
- 3) Soit x un réel. Calculer la limite de $\mathbb{P}(Z_n \leq xn)$ quand n tend vers $+\infty$.