

Colles Semaine 7 – 17 Novembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Simeon Jean-Baptiste

Un fabricant de tablettes de chocolat propose à ses acheteurs de collectionner des images. Chaque tablette vendue contient une image de la collection, mais à l'achat de chaque tablette l'image contenue est inconnue. Chaque image peut être collée dans un album contenant k emplacements ($k \geq 2$) correspondant au nombre d'images distinctes de la collection.

On se propose de déterminer le nombre moyen d'achats nécessaires pour constituer la collection complète des k images. Pour cela, on suppose que dans une tablette, chaque image a une probabilité égale de s'y trouver. Pour $i \in \{1, \dots, k\}$, on pose X_i la variable aléatoire représentant le nombre minimum d'achats nécessaires pour obtenir i vignettes différentes, et on pose Z_i la variable aléatoire égale au nombre minimum d'achats nécessaires pour obtenir la i -ème vignette, sachant qu'on en a déjà $i - 1$.

- 1) a) Déterminer la loi de X_1 et donner son espérance.
- b) Déterminer la loi de X_2 .
- 2) Pour $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, déterminer la loi de Z_i et donner son espérance.
- 3) a) Pour $i \in \{1, \dots, k - 1\}$, comparer $X_{i+1} - X_i$ et Z_i .
- b) En déduire que $\mathbb{E}(X_n) = n \sum_{i=1}^n 1/i$.
- c) Déterminer un équivalent quand n tend vers l'infini de $\mathbb{E}(X_n)$.

Sujet 2 - Loucif Houceine

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est une densité de probabilité.
- 2) Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f .
 - a) Calculer la fonction de répartition de X .
 - b) X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
- 3) On pose $Y = \ln(X)$.
 - a) Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y . Quelle loi reconnaissez-vous ?
 - b) Démontrer que $-Y$ est une variable aléatoire à densité et donner une densité de $-Y$.

Sujet 3 - Magniere Maxime

Soient a et b deux réels strictement positifs.

- 1) a) Etablir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

On notera à présent $I(a, b)$ sa valeur.

- b) Peut-on utiliser la linéarité de l'intégrale ici pour calculer directement $I(a, b)$?
- 2) Soient ϵ et X deux réels strictement positifs, avec $\epsilon \leq X$.
 - a) Démontrer que :

$$\int_{\epsilon}^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\epsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

b) Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(0) = 1$ et $\forall y > 0, h(y) = \frac{1-e^{-y}}{y}$. Démontrer que h est continue sur $[0, +\infty[$.

c) En déduire que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

d) Démontrer que :

$$\int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

e) En déduire que $I(a, b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

3) Application : Justifier la convergence, puis en utilisant un changement de variable soigneusement justifié, démontrer :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$$

Sujet 4 - Libe Léo

Exercice court

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Montrer que $|X|$ est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

Exercice

Soient $X_1, \dots, X_m$ m variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1, \dots, X_m)$.

1) a) Démontrer que, pour $\mathbb{P}(Y \leq k) = \prod_{i=1}^m \mathbb{P}(X_i \leq k)$.

b) En déduire la loi de Y .

2) a) Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Y \geq k)$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^m$.

c) Calculer $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y)$. Interpréter ce résultat.

Sujet 5 - Vieille Apolline

Pour n un entier naturel non nul, on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \quad \text{et} \quad w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$$

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$.

b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \frac{1}{e} \ln(n+1)$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

3) a) Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$$

b) On note I la valeur de l'intégrale précédente. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \leq I$$

c) En déduire un encadrement de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis un équivalent simple de u_n quand n tend vers l'infini.

Sujet 6 - Narod Tareq

On suppose dans cet exercice que toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit λ un réel strictement positif. Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \exp(-e^{-\lambda x})$.

1) a) Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0, 1[$.

b) En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.

2) a) Etablir l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(T)$.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ . Soit $Z = -\frac{1}{\lambda} \ln(\lambda X)$. Montrer que les variables aléatoires Z et T ont même loi.

c) En déduire que :

$$\mathbb{E}(T) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$$

3) En utilisant une intégration par parties, démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(e^{-y} \ln(y) + \int_y^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)$$

Remarque : En utilisant un résultat du sujet 3, et en poursuivant les calculs (qui requièrent toutefois un résultat d'interventions de sommes et d'intégrales hors programme), on peut parvenir à terminer le calculer, et à montrer que la valeur de cette intégrale est $-\gamma$, où γ est la constante d'Euler.

Sujet 7 - Larhlid Kenza

Question courte

Déterminer la nature de l'intégrale suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

Exercice : Des lois discrètes

Soit n un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Z_n qui est uniformément répartie sur l'ensemble $\{1, \dots, n\}$.

1) Montrer que Z_n admet une espérance et calculer $\mathbb{E}[Z_n]$.

2) Montrer que $\cos(\pi Z_n)$ admet une espérance et la calculer.

3) Soit x un réel. Calculer la limite de $\mathbb{P}(Z_n \leq xn)$ quand n tend vers $+\infty$.