Colles Semaine 8 – 24 Novembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Auduc Quentin

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$.
1) Démontrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les points critiques de f.
3) a) Démontrer que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x,y) = (x + \frac{y}{2} + 1)^2 + \frac{3}{4}(y + \frac{4}{3})^2 - \frac{7}{3}$.
b) En déduire la nature des points critiques de f.

Sujet 2 - Caline Lucie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les points critiques de f.
3) On s'intéresse maintenant au comportement de f au point $(0,0)$.
a) Si $\mathcal{D}$ est une droite passant par $(0,0)$, montrer que f restreinte à $\mathcal{D}$ possède un minimum local en $(0,0)$.
Indication : On pourra utiliser une équation de la droite $\mathcal{D}$ puis étudier f restreinte à $\mathcal{D}$ en étudiant une fonction d'une variable.
b) Déterminer l'ensemble des points (x,y) tels que $f(x,y) = 0$. Représenter cet ensemble de points sur un dessin.
c) L'ensemble de points précédent détermine différentes "régions" disjointes du plan. Sur ce même dessin, indiquer le signe de f sur chacune de ces différentes régions.
d) En déduire que f ne possède pas de minimum local en $(0,0)$.

Sujet 3 - Guillaud Solène

Soit f la fonction définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.
1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.
2) On étudie maintenant la continuité en $(0,0)$.
a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)$, puis calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x)$.
b) f est-elle continue en $(0,0)$?
3) a) Calculer les dérivées partielles de f.
b) Déterminer les points critiques de f.

Sujet 4 - Beroard Gilles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3$.
1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les points critiques de f.
3) a) Etudier les applications $x \mapsto f(x,x)$ et $x \mapsto f(x,-x)$.
b) En déduire la nature des points critiques de f.

Sujet 5 - Blanchet Alice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.
1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Soit (x,y) un point critique de f.
a) Démontrer que (x,y) vérifie les équations suivantes :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ e^x + x\ \exp(\frac{1}{x}) = 0 \end{cases}$$

En déduire que $x < 0$.
b) Soit g la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par $g(x) = e^x + x\ \exp(\frac{1}{x})$. Démontrer que g est croissante.
c) En déduire qu'il existe un unique $x < 0$ tel que $g(x) = 0$.
d) Calculer $g(-1)$, puis montrer que f admet un seul point critique et donner ses coordonées.

Sujet 6 - Braun Loys

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3y - yx^3$.
1) Démontrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les points critiques de f.
3) a) Etudier les fonctions $x \mapsto f(x, x/2)$ et $x \mapsto f(x/2, x)$.
b) En déduire la nature des points critiques de f.