Colles Semaine 9 – 1 Décembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Simeon Jean-Baptiste

Soit U l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que $x > 0$ et $y > 0$. On définit une fonction f sur U par : $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
1) Montrer que f est de la classe c^1 sur U.
2) Calculer le gradient de f en tout point de U.
3) a) Montrer que (x, y) est un point critique si et seulement si X et y sont solution du système :

$$\begin{cases} 3(x+y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ x - y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = t - \frac{1}{t^2}$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
c) En déduire que f admet un unique point critique dans U et déterminer ses coordonées.

Sujet 2 - Loucif Houceine

Question courte

Etudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{x^6 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
2) a) Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$
b) Montrer que pour tout couple de réels $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f(x, y)| \leq \frac{x^2+y^2}{4}$.
c) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ en utilisant la définition de la continuité.
3) Calculer les dérivées partielles de f.

Sujet 3 - Magniere Maxime

Soit ABC un triangle (non aplati). Soit M un point à l'intérieur de ce triangle. On cherche à maximiser le produit des distances de M à chacun des côtés. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

1) Modélisons tout d'abord le problème. Soient x,y et z les aires respectives des triangles MBC, MCA et MAB.

a) Etablir une relation simple liant x, y, z et $\mathcal{A}$.

b) En utilisant des formules de calcul d'aires de triangles, montrer que le produit des distances de M à chacun des côtés vaut $\frac{8}{abc} xy(\mathcal{A} - x - y)$.

2) On pose alors la fonction f définie par $f(x, y) = xy(\mathcal{A} - x - y)$. On s'est donc ramené à chercher le maximum de f sur le triangle $T = \{(x, y) \text{ tels que } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \mathcal{A}\}$. On admettra que f admet un maximum global sur ce triangle.

a) Montrer qu'en fait ce maximum est atteint à l'intérieur du triangle, c'est-à-dire sur $T' = \{(x,y)$ tels que $x > 0, y > 0, x+y < \mathcal{A}\}$. On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et que le maximum de f recherché sur cet ouvert est atteint en un point critique de f.

b) Montrer que f est de classe c^1 sur T'.

c) Montrer alors que si le maximum est atteint en (x,y), alors x et y sont solutions d'un système de deux équations que l'on déterminera. En déduire les valeurs de x et y, puis la valeur de z, et la valeur du maximum de la fonction f.

d) Démontrer que ce maximum est atteint en $M = G$ le centre de gravité du triangle ABC. On pourra, par exemple, utiliser le fait que la médiane d'un triangle partage celui-ci en deux triangles d'aires égales.

Sujet 4 - Debizet Anouk

Question courte

Etudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^{3/2}} dt$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x+y)^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(t) = \exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^*$, puis que g est prolongeable par continuité en 0.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3) f est-elle de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, donner ses dérivées partielles.

Sujet 5 - Ebondza Hélène

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On pose $D = [0,1] \times [0,1]$. On souhaite déterminer le maximum de f sur D (par la suite, quand on parlera du maximum de f, on sous-entendra toujours "maximum sur D").

2) On pose $\Omega =]0,1[\times]0,1[$. Vous verrez bientôt que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et que si le maximum de f est atteint sur Ω, alors il est atteint en un point critique de f appartenant à Ω.

a) Calculer les dérivées partielles de f.

b) En déduire que si le maximum de f est atteint sur Ω, alors ce maximum vaut $M_0 = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

3) On s'intéresse alors au comportement de f sur la frontière de D.

a) On pose $g(t) = f(t,0)$. Déterminer le maximum de f sur $[0,1]$.

b) On pose $h(t) = f(1,t)$. Montrer que le maximum de f sur $[0,1]$ est $M_1 = \frac{1}{4(\sqrt{2}-1)}$.

c) Exprimer, pour $t \in [0,1]$, $f(0,t)$ et $f(t,1)$ en fonction de g et h. En déduire le maximum de f sur la frontière de D.

d) Déterminer le maximum de f sur D (on pourra utiliser une calculatrice).

Sujet 6 - Folliet Geoffrey

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$.

1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2) Démontrer que f admet exactement deux points critiques, qui sont $A(0,0)$ et $B(1,1)$.

3) a) Etudier la fonction $x \mapsto f(x,0)$, en déduire la nature du point critique A.

b) La figure 1 ci-dessous représente, pour des valeurs de x et y proches de 1, la valeur de $f(x, y)$. Plus précisement, la figure 1a représente le graphe de f, et la figure 1b représente quelques lignes de niveau de f, où plus la couleur est claire, plus la valeur de $f(x, y)$ est grande (ce qu'on peut voir aussi sur la première figure). Conjecturer d'après ces figures si le point B est un extrémum local ou non, et si c'est un extrémum local, donner sa nature.

4) f admet-elle des extrémas globaux ? Justifier.

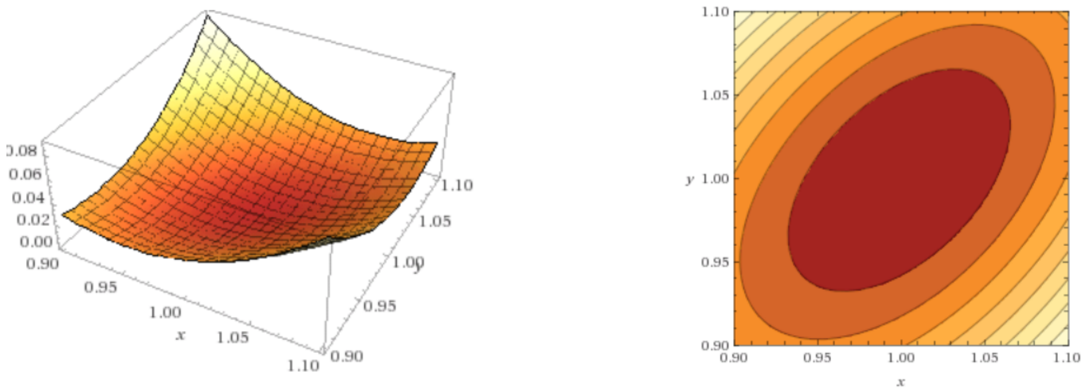

FIGURE 1 – Graphe de la fonction f au voisinage du point $(1, 1)$ (en 3D et courbes de niveau)