Colles Semaine 1 – 16 Septembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif de la colle n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Kheddar Heddy

Problème - La fuite du rat Spoutine

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Un rat (prénommé Spoutine) se trouve dans une boîte. Sur les cloisons de cette boîte sont dessinées $n-1$ fausses portes (on suppose $n \geq 2$). Cette boîte comporte également une vraie porte lui permettant de sortir de la boîte.

Lorsque le rat s'aperçoit qu'il a choisi une fausse porte, il revient au centre de la boîte pour retenter sa chance.

On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'essais fait par le rat pour trouver la porte qui lui permet de sortir.

1) On suppose que le rat ne possède pas de mémoire. Déterminer la loi de X.

2) Dans cette question, le rat n'a toujours pas de mémoire, mais à chaque erreur, on dessine une nouvelle fausse porte. Au départ, la cage possède une fausse porte et la vraie porte.

Déterminer dans ce cas la loi de X. Cette variable aléatoire admet-elle une espérance ?

3) On suppose maintenant que le rat est sans mémoire pendant les l premiers essais (avec $l < 0$), puis possédant une mémoire immédiate ensuite : à partir du $(l+1)-$ième essai, et tant qu'il n'est pas sorti, il évite la dernière porte essayée pour l'essai suivant.

On pose $X' = Y \times \mathbf{1}_{[Y \leq l]} + (l+Z) \times \mathbf{1}_{[Y > l]}$, où Y et Z sont deux variables aléatoires, telles que Y suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$ et Z une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n-1}$.

a) Montrer que X suit la même loi que X', puis déterminer la loi de X'.

b) Vérifier enfin que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X' = k) = 1$.

Sujet 2 - Paillard-Brunet Garance

Exercice 1 - Un peu de jonglage

Soient A, B et C trois évènements. On suppose que $\mathbb{P}(C) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B \cap C) \neq 0$.

Montrer que $\mathbb{P}(A|B \cap C) \times \mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(A \cap B|C)$.

Exercice 2 - un max de lois uniformes !

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit $(X_i)_{i \in \{1,..,n\}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note $M_n = \sup\{X_i, i \in \{1,..,n\}\}$.

1) Soit $n > 0$. Déterminer la fonction de répartition F_n de la variable aléatoire $n(M_n - 1)$.

2) Montrer que pour tout réel x, la suite $(F_n(x))_n$ converge vers une valeur g(x).

3) Montrer que g', définie sur $\mathbb{R}^*$, est une densité de probabilité. On notera G une variable aléatoire de densité g'.

4) Calculer $\mathbb{E}(G)$.

Sujet 3 - Rharbaoui Yacine

Exercice 1 - Coquilles

Un sujet de colle contient 4 coquilles. A chaque relecture, une coquille non corrigée est corrigée avec probabilité 1/3. Les relectures sont indépendantes les unes des autres. Combien de relectures faut-il faire au minimum pour que la probabilité qu'il ne reste aucune coquille soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 2 - Des densités !

1) Rappeler la densité, la fonction de répartition et l'espérance d'une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$.

A partir de maintenant, on considère U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 2]$. Soit $X = \sqrt{U}$.

2) Calculer la fonction de répartition F_X de X.

3) Calculer la densité f_X de X.

4) Mêmes questions pour $Y = 1/U$.

Sujet 4 - Vago David

Exercice 1 - Densité de probabilité de la valeur absolue

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X symétrique (c'est-à-dire $f_X(x) = f_X(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$). Montrer que la densité $f_{|X|}$ de $|X|$ est reliée à celle de X par :

$$f_X(x) = \frac{1}{2} f_{|X|}(|x|)$$

Exercice 2 - Soyez à l'heure !

Un détaillant reçoit un lot de montres identiques, qui provient soit de l'usine A, soit de l'usine B. Dans l'usine A, une montre sur 200 est défectueuse. Dans l'usine B, seulement une montre sur 1000 est défectueuse. Le détaillant inspecte un lot au hasard (le choix de l'usine de provenance est équiprobable). Il regarde une première montre : elle fonctionne. Il regarde une seconde montre. Calculer la probabilité que cette deuxième montre fonctionne.

Sujet 5 - Vallette d'Osia Louise

Exercice 1 - Comme un Poisson dans l'eau !

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y = (-1)^X$.

1) Déterminer $Y(\Omega)$.

2) Trouver la loi de Y, puis calculer son espérance $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2 - Tête en l'air...

Le professeur Tournesol voyage par avion de Los Angeles à Paris avec deux escales, la première à New York, et la seconde à Londres. A chacune de ces étapes (Los Angeles, New York, Londres et Paris), il a une probabilité p d'y perdre sa valise.

Arrivé à Paris, Tournesol se rend compte qu'il a perdu sa valise. Quelle est la probabilité qu'il l'ait perdu à Los Angeles ? A New York ? A Londres ?

Sujet 6 - Kane Yaye

Exercice 1 - Des dés

On lance deux dés non truqués et on pose les évènements :

- A_1 : le résultat du premier dé est pair.
- A_2 : le résultat du deuxième dé est pair.
- A_3 : la somme des résultats des deux lancers est impaire.

Ces évènements sont-ils indépendants deux à deux ? Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 2 - Moi d'abord !

Alice et Bob lancent une pièce non biaisée à tour de rôle, le premier qui fait face a gagné. Alice commence.

1) Calculer la probabilité qu'Alice gagne.

2) Montrer qu'il n'est pas possible de truquer la pièce pour rendre le jeu équitable, c'est-à-dire tel que $\mathbb{P}(\text{Alice gagne}) = \mathbb{P}(\text{Bob gagne}) = \frac{1}{2}$.

3) Cette fois Alice et Bob lancent deux dés. Alice gagne si elle obtient 7, Bob gagne s'il obtient 6. Bob s'est déjà fait avoir une fois, par conséquent il exige de commencer. En utilisant un raisonnement analogue à celui de la question 1, montrer que $\mathbb{P}(\text{Bob gagne}) = \frac{30}{61}$. Conclusion ?
