Colles Semaine 10 – 9 Décembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Pitavy Emilien

Question courte

Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3$.
1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les points critiques de f.
3) En étudiant $f(x,x)$ et $f(x,-x)$, dire si f admet un extremum.

Sujet 2 - Ribière Anaïs

Exercice : Distance du bord d'un triangle

Soit ABC un triangle (non aplati). Soit M un point à l'intérieur de ce triangle. On cherche à maximiser le produit des distances de M à chacun des côtés. On pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ et $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

1) Modélisons tout d'abord le problème. Soient x,y et z les aires respectives des triangles MBC, MCA et MAB.

a) Etablir une relation simple liant x, y et z.

b) En utilisant des formules de calcul d'aires de triangles, montrer que le produit des distances de M à chacun des côtés vaut $\frac{8}{abc}xy(\mathcal{A} - x - y)$.

2) On pose alors la fonction f définie par $f(x,y) = xy(\mathcal{A} - x - y)$. On s'est donc ramené à cherche le maximum de f sur le triangle $T = \{(x,y)$ tels que $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \mathcal{A}\}$. On admettra que f admet un maximum global sur ce triangle.

a) Montrer qu'en fait ce maximum est atteint à l'intérieur du triangle : $T' = \{(x,y)$ tels que $x > 0, y > 0, x + y < \mathcal{A}\}$. On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f est de classe c^1 sur T'.

c) Montrer qu'alors si le maximum a lieu en (x,y), alors x et y sont solutions d'un système de deux équations que l'on déterminera. En déduire les valeurs de x et y, puis la valeur du maximum de la fonction f.

d) (Question plus géométrique) En quel point particulier du triangle se trouve M qui réalise le maximum trouvé ?

Sujet 3 - Souchois Mélanie

Question courte

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Montrer que s'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors nécessairement n est pair.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xe^y + ye^x$.
1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que f admet un seul point critique et déterminer ses coordonées.
3) En considérant $f(x,0)$ et $f(x,-1)$, montrer que f n'admet pas d'extrema globaux.

Sujet 4 - Waldmann Héloïse

Exercice 1 : Points critiques

Soit f la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x,y) = xy + 8(1/x + 1/y)$.
1) Montrer que f est de classe c^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$
2) Déterminer les points critiques de f.

Exercice 2 : Orthonormalisation

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $\varphi(P,Q) = P(-1)Q(-1) + P(0)Q(0) + P(1)Q(1)$.
1) Montrer que φ est un produit scalaire.
2) Construire une base orthonormée de $(\mathbb{R}_2[X], \varphi)$, que l'on notera (P_0, P_1, P_2), telle que $\deg(P_i) = i$.

Sujet 5 - Jaramillo Nicole

Exercice : Un minimum "local" pas si local que ça

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$.
1) Montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2) Calculer le gradient de f, puis déterminer les points critiques de f.
3) On s'intéresse maintenant au comportement de f au point $(0,0)$.
a) Si $\mathcal{D}$ est une droite passant par $(0,0)$, montrer que f restreinte à $\mathcal{D}$ possède un minimum local en $(0,0)$.
Indication : On pourra utiliser une équation de la droite $\mathcal{D}$ puis étudier f restreinte à $\mathcal{D}$ en étudiant une fonction d'une variable
b) Représenter le signe de f en fonction de x et y sur un dessin. En déduire que f ne possède pas de minimum local en $(0,0)$. Conclusion ?
