Colles Semaine 12 – 7 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Beauvoir Esther

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème suivant : "Applications linéaires : injectivité, surjectivité, noyau et image".

La question : Enoncer le théorème du rang. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire avec noyau et/ou image.

Exercice : Une méthode probabiliste

On considère dans cet exercice, l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^p$ munit de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme associée est notée $\| \cdot \|$. Soient $u_1, \dots u_n$ n vecteurs de norme 1.

A tout $n-$uplet $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\{-1, 1\}^n$, on associe le vecteur v_x de $\mathbb{R}^p$ défini par $v_x = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k$. Graphiquement, cela revient à mettre "bout à bout" les vecteurs u_i dans un sens ou son opposé suivant les valeurs des x_i, on peut voir un exemple sur la figure ci-dessous en dimension $p = 2$ avec le triplet $\{-1, 1, 1\}$.

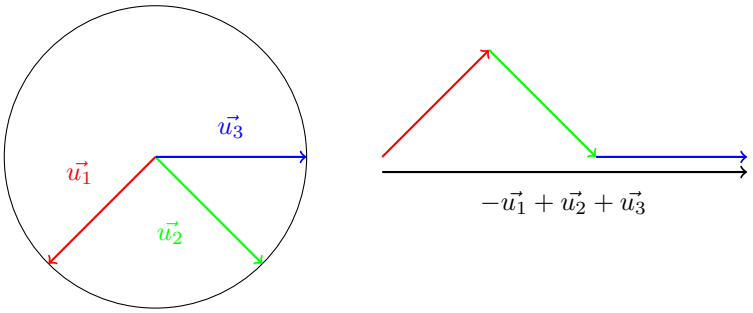

FIGURE 1 – Un exemple en dimension 2 et le triplet $\{-1, 1, 1\}$.

On souhaite montrer qu'il existe un $n-$uplet x tel que $\|v_x\| \leq \sqrt{n}$, autrement dit qu'on peut obtenir un vecteur de longueur plus petite que $\sqrt{n}$. Pour cela on va faire appel aux probabilités. On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ainsi que n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, chacune d'entre elles suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On définit enfin $X = \left\| \sum_{j=1}^{n} X_j u_j \right\|$. On admet que X est une variable aléatoire.

1) Par rapport à l'interprétation graphique du problème, expliquer ce que représente X.

2) Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de x tel que $\|v_x\| \leq \sqrt{n}$. Que dire alors du support de la variable aléatoire X ? En déduire une majoration de l'espérance de X ?

3) a) Calculer $\mathbb{E}(X_i X_j)$ pour $i \neq j$, puis calculer $\mathbb{E}(X_i^2)$.

b) En déduire l'espérance de X.

c) Conclure sur l'existence de x à l'aide des questions précédentes.

3) Adapter ce raisonnement pour montrer qu'il existe un $n-$uplet y tel que $\|v_y\| \geq \sqrt{n}$.

Sujet 2- Bonnin Clémence

Question courte

Etudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{x})}{1+x^2}dx$$

Exercice : Etude d'un produit scalaire

On note $\mathcal{A}([0,+\infty[,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier, on rappelle que c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On définit E comme étant l'ensemble des fonctions $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ bornées, de classe c^1, telles que $f(0)=0$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}([0,+\infty[,\mathbb{R})$.

2) a) Montrer que, pour $f \in E$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$.

b) En déduire que l'application $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}, (f,g) \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}dx$ est bien définie.

c) Montrer que φ définit en fait un produit scalaire sur E.

3) Démontrer que pour tout $(f,g) \in E^2$, $\varphi(f,g) = \int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{x}dx$

Sujet 3 - Delille Apolline

Question courte

Etudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$$

Exercice : Caractérisation des isométries dans un préhilbertien réel

Soit E un espace vectoriel munit d'un produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Soit f une application de E dans lui-même telle que $f(0)=0$ et $\forall (x,y)\in E^2$, $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$. On dit que f est une isométrie (car elle conserve les distances).

1) Montrer que f conserve la norme, c'est-à-dire $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$.

2) Montrer que $\forall (x,y)\in E^2$, $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x,y\rangle$.

3) Montrer que $\forall (x,y)\in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|f(\lambda x+y) - (\lambda f(x)+f(y))\| = 0$.

4) Conclusion ?

Sujet 4 - Hosni Tej

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème "Sous espaces supplémentaires et orthogonaux dans un espace euclidien".

La question : Définition de deux sous espaces vectoriels orthogonaux. A-t-on orthogonaux => supplémentaires ? Réciproque ?

Exercice : Cadeaux de Noël

Désireux de faire des économies, le Père Noël souhaite pour 2016 créer un emballage le plus économique possible. Il veut obtenir un parallélépipède rectangle de volume V **fixé** de surface (ou aire) minimale. On notera dans cet exercice x, y et z les longueurs des côtés du parallélépipède.

1) Donner la relation liant V, x, y et z. En déduire que la surface de la boîte est donnée par :

$$S(x,y) = 2\left(xy + V\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\right)$$

.

On s'est ainsi ramené à l'étude d'une fonction de deux variables.

2) Montrer que S est de classe c^1 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. On admet que S admet un minimum global sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

3) Démontrer que si $S(x,y)$ est minimal, alors (x,y) vérifie un système d'équations que l'on résoudra.

4) Conclure sur la forme du paquet cadeau.

Sujet 5 - Vasseur Gaston

Exercice 1 : Mise en bouche

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique. Déterminer le noyau et l'image de f. Sont-ils supplémentaires ? orthogonaux ?

Exercice 2 : Bernouilli comes back

On considère n variables aléatoires de Bernouilli indépendantes, notées $U_1, \dots, U_n$, de même loi, de paramètre $p \in]0,1[$.

1) Calculer $\mathbb{E}(U_1 + \cdots + U_n)$ et $\mathrm{Var}(U_1 + \cdots + U_n)$.

2) Calculer $\mathbb{P}(U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq U_n)$.

3) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n U_i = k | \sum_{i=1}^n U_i > 0\right)$.

Sujet 6 - Narod Tareq

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème : "Lien entre gradient, points critiques et extremas d'une fonction de plusieurs variables".

La question : Définition du gradient. Quels types d'extremas connaissaient vous (maximum, minimum, local vs global). Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe c^1, à quelle condition un extrema de f est-il atteint en un point critique ?

Exercice : Etude d'un endomorphisme dans un espace euclidien

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ son produit scalaire. Soient u un vecteur de E fixé de norme 1, et λ un réel non nul fixé. On définit f_λ l'application qui à un vecteur x de E associe $f_\lambda(x) = \lambda \langle x, u \rangle u + x$.

1) Montrer que f_λ est un endomorphisme de E.

2) Montrer que le polynôme $X^2 - (\lambda+2)X + (\lambda+1)$ est un polynôme annulateur de f_λ. Déterminer ses racines.

3) a) Calculer $f_\lambda(u)$ et $f_\lambda(v)$ pour $v \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

b) En déduire toutes les valeurs propres de f_λ, ainsi que les sous-espaces propres associés.

c) Comparer avec le résultat de la question 2.