

Colles Semaine 13 – 13 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Barbier Sarah

Exercice : Autour d'une loi de couple

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On connaît la loi de probabilité du couple (X, Y) :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = p^2 q^{i+j}$$

où p et q sont deux réels de $]0, 1[$ tels que $p + q = 1$.

- 1) a) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) . Que remarque-t-on ?
- b) Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
- c) Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .

Indication : Pour plus de clarté, on pourra introduire, pour $x \geq 0$, l'entier k_x tel que $k_x - 1 < x \leq k_x$.

- 2) a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $U = \max(X, Y)$.
- b) En déduire la loi de U .
- 3) a) Démontrer que pour tout entier naturel k , $\mathbb{P}(X + Y = k) = (k + 1)p^2 q^k$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Déterminer la loi conditionnelle sachant $(X + Y = 2n + 1)$ de U .
- c) Quelle loi usuelle reconnaissez-vous ?

Sujet 2 - Battesti Mazarine

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème suivant : "Intégrales impropres : propriétés et calcul".

Exercice : Autour d'un lancer de dé

Un joueur lance un dé équilibré à 6 faces. Soit X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir une fois (respectivement 2 fois) le chiffre 3.

- 1) a) Donner sans calcul la loi de probabilité de X et celle de Y . Justifier.
- b) Soit k un entier naturel non nul. Donner, sans calcul, la loi conditionnelle sachant $(X = k)$ de Y . Justifier.
- c) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- d) Soit $n \geq 2$. Déterminer la loi conditionnelle sachant $(Y = n)$ de X .
- 2) Soit m un entier naturel non nul. Déterminer la loi de $Z = \min(X, m)$.

Sujet 3 - Baudras Mariette

Exercice 1 : Mise en bouche

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A dans la base canonique.

Déterminer le noyau et l'image de f . Sont-ils supplémentaires ? orthogonaux ?

Exercice 2 : Bernoulli comes back

On considère n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes, notées $U_1, \dots, U_n$, de même loi, de paramètre $p \in]0, 1[$.

- 1) Calculer $\mathbb{E}(U_1 + \dots + U_n)$.
 - 2) Calculer $\mathbb{P}(U_1 \leq U_2 \leq \dots \leq U_n)$.
 - 3) Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n U_i = k \mid \sum_{i=1}^n U_i > 0\right)$.
-

Sujet 4 - Dufour Dimitri

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème : "Produit scalaire et norme : égalités et inégalités".

Exercice : Que dire avec les lois marginales ?

Une urne contient 3 boules blanches et 4 boules noires. On tire au hasard deux boules dans l'urne. Soit X la variable aléatoire égale à 1 si la première boule est blanche, et à 0 sinon. Soit Y la variable aléatoire égale à 1 si la deuxième boule est blanche, et à 0 sinon.

- 1) Déterminer la loi du couple (X, Y) et les lois marginales du couple (X, Y) dans le cas d'un tirage avec remise.
 - 2) Même question si le tirage est sans remise.
 - 3) Comparez vos résultats.
 - 4) Dans le cas du tirage avec remise, calculer la loi de la variable aléatoire $Z = \max(X, Y)$.
-

Sujet 5 - Girier-Dufournier Jehan

Exercice : Vecteurs de Bernoulli

On note $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes à k lignes à coefficients réels, sa base canonique est notée $(e_1, \dots, e_n)$. On dit qu'un vecteur aléatoire $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ admet une espérance si chacune des variables

aléatoires Y_i admet une espérance, et dans ce cas on pose $\mathcal{E}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(Y_1) \\ \vdots \\ \mathbb{E}(Y_k) \end{pmatrix}$. On note $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_k \end{pmatrix}$ un

élément de $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout i , $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

On dit qu'un vecteur aléatoire $(Y_1, \dots, Y_k)$ suit la *loi généralisée de Bernoulli de paramètre p* si on a pour

tout i : $\mathbb{P}(Y = e_i) = p_i$, avec $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_k \end{pmatrix}$.

- 1) a) Montrer que chaque variable aléatoire Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i .
- b) En déduire que Y admet une espérance et donner $\mathcal{E}(Y)$.
- 2) a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y_1 + Y_2$.
- b) Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y_1 + \dots + Y_n$?
- 3) a) Montrer que $\text{Cov}(Y_1, Y_2) = -p_1 p_2$.
- b) Calculer la matrice de variance-covariance du vecteur aléatoire Y .

Sujet 6 - Gounot Thomas

Exercice 1 : Symétrie et antisymétrie

On pose $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$. On rappelle que $\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$ pour $M \in E$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire telles que ${}^tA = A$ (respectivement ${}^tA = -A$). On rappelle que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 2 : Plein de lois uniformes

Soient $X_1, \dots, X_m$ m variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et de même loi uniforme sur $\{1, \dots, n\}$. Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \max(X_1, \dots, X_m)$.

1) a) Calculer $\mathbb{P}(Y \leq k)$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$.

b) En déduire la loi de Y .

2) a) Démontrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(Y \geq k)$.

b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^m$.

c) Calculer $\lim_{m \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Y)$.

d) Comment interpréter ce résultat ?