

Colles Semaine 15 – 28 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours sera fortement sanctionnée.

Sujet 1 - Beauvoir Esther

Question courte

Vous aurez une question courte autour du thème : "Intégrales de références"

Exercice : Autour d'une densité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(1 - |x|) & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Déterminer α tel que f soit une densité.
- 2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X admette f pour densité, et Y suive une loi uniforme sur $[-1, 1]$.
 - a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $-Y$.
 - b) Calculer la densité de la variable aléatoire $X - Y$.

Sujet 2 - Bonnin Clémence

Question courte

Vous aurez une question courte autour du thème : "Somme de variables aléatoires à densité : théorèmes".

Exercice : Etude d'ensembles de suites

On note E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \geq 1}$ telles que la série de terme général $n^2 u_n^2$ converge. On note F le sous-ensemble de E formé des suites pour lesquelles on a en plus $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n^2 \leq 1$.

- 1) On étudie dans cette question quelques exemples.
 - a) Soit a_n la suite définie par $a_n = \frac{1}{n^2}$. Montrer qu'elle appartient à E . Appartient-elle à F ?
 - b) Soit b_n la suite définie par $b_n = \frac{1}{n\sqrt{n(n+1)}}$. Montrer qu'elle appartient à E et à F .
 - c) Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $1/2$. Rappeler les valeurs de l'espérance et de la variance de X . En déduire que la suite $c_n = \frac{1}{2^{n/2}}$ appartient à E et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 c_n^2$.
- 2) On étudie maintenant quelques propriétés de E et F .
 - a) Montrer que si u et v sont deux suites de E , alors la série de terme général $n^2 u_n v_n$ converge absolument.
 - b) En déduire que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - c) F est-il un sous-espace vectoriel de E ?
 - d) Montrer que l'application définie sur $E \times E$ par $\langle u, v \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 u_n v_n$ définit un produit scalaire sur E .

Sujet 3 - Delille Apolline

Question courte

Vous aurez une question courte autour du thème "Egalités et inégalités entre produit scalaire et norme dans un espace euclidien".

Exercice : Ecart entre exponentielles

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi exponentielle de paramètre λ .

- 1) Rappeler la densité de X et Y .
- 2) Déterminer une densité de la variable aléatoire $-Y$.
- 3) Démontrer que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

- 4) Déterminer la loi de la variable aléatoire $|X - Y|$.

Sujet 4 - Hosni Tej

Exercice : Des variables aléatoires à densité pour un calcul d'intégrale

On rappelle qu'une variable aléatoire Z suit un loi gamma de paramètre θ et k , notée $Z \sim \Gamma(\theta, k)$ si sa fonction de densité est :

$$f_Z(x) = \frac{x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(k) \theta^k}$$

On rappelle quelques valeurs de la fonction Γ : $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(2) = 1$ et $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant toutes les deux la loi normale centrée réduite.

- 1) Rappeler une densité de X et Y .
- 2) On pose $U = X^2$ et $V = Y^2$. Montrer que U et V suivent la loi $\Gamma(2, \frac{1}{2})$.
- 3) On pose W la variable aléatoire : $W = U + V$.
 - a) Donner **sans calcul** la loi de W , ainsi qu'une densité de W , notée g_W . Donner également son espérance.
 - b) En notant f_U et f_V des densités respectives de U et V , démontrer qu'une densité de W est donnée par la fonction f_W définie par :

$$f_W(x) = \begin{cases} \int_0^x f_U(t) f_V(x-t) dt & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Indication : On pourra commencer par utiliser un théorème de cours pour exprimer f_W également sous la forme d'une intégrale. On fera particulièrement attention au fait que si g_U est la densité de U trouvée en 2), alors f_U et g_U ne sont pas nécessairement égales sur $\mathbb{R}$.

- 4) Application : Pour $x > 0$, on définit $I(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$.
 - a) Dédire des questions précédentes que cette intégrale converge.
 - b) En utilisant le changement de variable $y = \frac{t}{x}$, démontrer que l'application $x \mapsto I(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
 - c) En utilisant 3a), en déduire la valeur de $I(x)$ pour $x > 0$.

Sujet 5 - Vasseur Gaston

Question courte

Vous aurez une question courte autour du thème : "Sous-espaces propres d'un endomorphisme : définition, propriétés".

Exercice : Etude d'un modèle d'urne

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs dans l'urne de la manière suivante : à chaque tirage, on choisit au hasard et de manière équiprobable une boule dans l'urne, puis on la replace dans l'urne avec une autre boule de la même couleur. Par exemple, si la première boule tirée est blanche, l'urne contient à la fin du premier tirage deux boules blanches et une boule noire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches dans l'urne à la fin du n -ième tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.

- 1) a) A l'aide d'un arbre, déterminer les lois de X_1 , X_2 et X_3 . Que remarquez-vous ?
- b) Démontrer par récurrence sur n que X_n suit la loi uniforme sur $\{1, \dots, n+1\}$.
- 2) Calculer la probabilité de l'événement : "La boule tirée au n -ième tirage est blanche".
- 3) On suppose maintenant que l'urne contient au départ a boules blanches et b boules noires. On note B_k l'événement "tirer une boule blanche au k -ième tirage", et N_k l'événement "tirer une boule noire au k -ième tirage".
 - a) Calculer la probabilité de l'événement $B_1 \cap \dots \cap B_k \cap R_{k+1} \cap R_n$ pour $1 \leq k \leq n-1$. Que représente cet événement ?
 - b) En s'inspirant de la question précédente, déterminer la loi de X_n .

Sujet 6 - Narod Tareq

Problème : Une minimisation

Etant donnés n points (x_i, y_i) du plan $\mathbb{R}^2$, où les x_i sont deux à deux distincts, on cherche à minimiser la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(\lambda, \mu) = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu - y_i)^2$$

Dans tout le problème on notera, pour $k \in \mathbb{N}$, $s_k = \sum_{i=1}^n x_i^k$ et $t_k = \sum_{i=1}^n x_i^k y_i$.

- 1) En considérant la droite du plan d'équation $y = \lambda x + \mu$, donner une interprétation géométrique du problème.

Nous allons montrer qu'il existe des nombres λ et μ uniques qui rendent minimum $f(\lambda, \mu)$.

- 2) La première étape consiste à rechercher les points critiques de f .

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

- b) Démontrer que (λ, μ) est un point critique de f si et seulement si il est solution du système linéaire :

$$\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & s_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_0 \end{pmatrix}$$

- c) Montrer que $s_0 s_2 - s_1^2 > 0$. En déduire que la matrice $\begin{pmatrix} s_2 & s_1 \\ s_1 & s_0 \end{pmatrix}$ est inversible.

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

- d) Démontrer que f admet un unique point critique.

3) On veut maintenant montrer que le point critique trouvé précédemment correspond bien à un minimum global. Soient (λ, μ) ses coordonnées. Démontrer que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $f(\lambda + \alpha, \mu + \beta) - f(\lambda, \mu)$ est une quantité indépendante de λ et μ que l'on exprimera en fonction de α , β et des x_i . Conclure.