Colles Semaine 15 – 27 Janvier

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours sera fortement sanctionnée.

Sujet 1 - Pitavy Emilien

Exercice court

Justifier la convergence et donner une relation de récurrence pour calculer l'intégrale :

$$I_n = \int_1^e (\ln(t))^n dt$$

Exercice : Elevage de chats

Soit n un entier naturel strictement positif. Une population de chats compte $n+1$ mâles et $n-1$ femelles. On choisit simultanément deux chats au hasard.

1) Calculer la probabilité qu'ils soient de sexe différent en fonction de n. On la notera par la suite p_n.

2) a) Etudier la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x}$.

b) En déduire l'entier n pour que p_n soit maximale.

Sujet 2 - Ribière Anaïs

Problème : Autour de lois exponentielles

Dans tout le problème, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X est une variable aléatoire, on notera F_X sa fonction de répartition.

On considère une suite de n variables aléatoires (X_n) indépendantes, suivant la même loi exponentielle de paramètre 1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux variables aléatoires suivantes :

$$Y_n = \max\,(X_1, \dots, X_n)$$

$$Z_n = \frac{X_1}{1} + \frac{X_2}{2} + \cdots + \frac{X_n}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{i}$$

Enfin, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} ne^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de démontrer que Y_n et Z_n suivent en fait la même loi.

1) Rappeler l'expression des F_{X_i}.

2) Etude de Y_n

a) Déterminer la fonction de répartition de Y_n.

b) Vérifier alors que f_n est une densité de Y_n.

3) Etude de Z_n

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $\frac{X_{n+1}}{n+1}$. En déduire que c'est une variable aléatoire à densité et donner une densité.

b) Démontrer que pour tout réel x :

$$\int_0^x ne^{nt}(1-e^{-t})^{n-1}dt = (e^x-1)^n$$

Indication : On pourra dériver $x \mapsto (e^x-1)^n$.

c) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n est une variable aléatoire à densité dont f_n est une densité.

Sujet 3 - Souchois Mélanie

Exercice 1 : Un calcul d'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0,1]$.

On pose $Z = X+Y$, $T = \max(X,Y)$ et $U = |X-Y|$.

1) Calculer $\mathbb{E}(Z)$.

2) a) Déterminer une densité de T.

b) Calculer $\mathbb{E}(T)$.

3) Montrer que U est une combinaison linéaire de Z et T. En déduire $\mathbb{E}(U)$

Exercice 2 : Interpolation

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels deux à deux distincts. On définit l'application linéaire :

$$\varphi : \mathbb{R}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \mapsto \varphi(P) = (P(a_1),\dots,P(a_n))$$

1) Démontrer que φ est un isomorphisme.

2) En déduire que pour tous réels $(b_1,\dots,b_n)$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in \{1,\dots n\}, P(a_i) = b_i$$

Sujet 4 - Waldmann Héloïse

Exercice 1 : Somme d'exponentielles

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, définies sur un même espace probabilisé, suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ et μ.

1) Rappeler une densité de X et Y.

2) Déterminer une densité de $X+Y$ dans le cas où $\lambda \neq \mu$.

3) Déterminer une densité de $X+Y$ dans le cas où $\lambda = \mu$.

Exercice 2 : Un produit scalaire

Pour toutes matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit :

$$\langle A, B\rangle = \sum_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} (i+j)^2 a_{i,j} b_{i,j}$$

1) Démontrer que l'application $\langle .,. \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Pour $(i,j) \in \{1,\dots n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient (i,j) qui vaut 1. On rappelle que les $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette base est-elle orthonormée pour le produit scalaire étudié ? Si non, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.

Sujet 5 - Jaramillo Nicole

Exercice : Reconstitution de paires

Dans tout l'exercice, toutes les variables aléatoires considérées sont défénies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une urne contient $2n$ boules, numérotées de 1 à n, chaque numéro apparaissant deux fois. On effectue au hasard une succession de tirages simultanés de deux boules de l'urne selon le protocole suivant : à chaque tirage de deux boules, si les deux boules portent le même numéro, on ne les remet pas dans l'urne. On dit alors qu'une paire est reconstituée. Dans le cas contraire, on les remet dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.

Pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, on définit T_i la variable aléatoire décrivant le nombre exact de tirages nécessaires pour reconstituer i paires (on admet en particulier que cela définit une variable aléatoire).

1) a) Déterminer la loi de T_1. Quelle loi reconnaissez-vous ?

b) Donner **sans calcul** l'espérance de T_1.

2) On définit les variables aléatoires (X_i) par $X_1 = T_1$ et pour $i \in \{2, \ldots, n\}$, $X_i = T_i - T_{i-1}$.

a) Que représente X_i ?

b) Déterminer pour tout i la loi de X_i et son espérance.

c) En déduire que T_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(T_n) = n^2$.

3) On effecte une suite de n tirages de deux boules selon le protocole précédent. Soit S_n la variable aléatoire égale au nombre de paires reconstituées lors de ces n tirages.

a) Déterminer $S_n(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(S_n = 0)$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)$.

c) Montrer que $\mathbb{P}(S_n = n) = \frac{n! 2^n}{(2n)!}$.