Colles Semaine 17 – 3 Février

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours seront fortement sanctionnées.

Sujet 1 - Courty Romain

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème suivant : "Endomorphismes symétriques : propriétés".

Exercice 1 : Recherche d'extremum locaux

Soit F la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $F(x) = \ln(x+2) - \ln(x)$, et soit H la fonction définie sur $]1,+\infty[^2$ par $H(x,y) = F(x) + F(y) - 2F(xy)$.

1) Montrer que H est de classe c^1 sur $]1,+\infty[^2$ et calculer les dérivées partielles premières de H.

2) Montrer que H un unique point critique que l'on calculera.

On note (x_0, y_0) les coordonnées de ce point critique.

3) Démontrer que H est de classe c^2 sur $]1,+\infty[^2$.

4) Démontrer que $]1,+\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

5) On donne les valeurs suivantes des dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x_0,y_0) \simeq -1,2\cdot 10^{-2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \simeq -4,5\cdot 10^{-2}$$

La fonction H admet-elle un extremum local sur $]1,+\infty[^2$? Justifier.

Sujet 2 - Rouane Brice

Exercice : Une décomposition

Dans tout l'exercice, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1) a) Préciser la taille de ${}^tAA$.

b) Justifier que ${}^tAA$ est diagonalisable.

c) Démontrer que les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs.

2) On note à présent $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de ${}^tAA$. Pour $1 \leq i \leq p$, on note $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ le sous-espace propre de ${}^tAA$ associé à la valeur propre λ_i, et P_i la matrice de la projection orthogonale sur $E_{\lambda_i}({}^tAA)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Démontrer que si $i \neq j$, P_iP_j est la matrice nulle.

b) Démontrer que $I_n = \sum\limits_{i=1}^{p} P_i$.

c) Démontrer que ${}^tAA = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i P_i$.

Cette dernière écriture est appelée *décomposition spectrale* de ${}^tAA$.

3) Etude d'un exemple : Déterminer la décomposition spectrale de A lorsque :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sujet 3 - Maaoui Abir

Exercice : Etude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On rappelle que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $P^{(j)}$ la dérivée $j-$ième de P. On définit enfin la famille de polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ par :

$$P_0(X) = 1 \quad \text{ et } \forall k \in \{1, \ldots, n\}, P_k(X) = \frac{X(X-k)^{k-1}}{k!}$$

1) a) Rappeler la dimension de E.

b) Démontrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E.

c) Démontrer que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, $P_k'(X+1) = P_{k-1}(X)$.

d) En déduire une relation entre $P_k^{(j)}(X)$ et $P_{k-j}(X-j)$ pour tous les entiers k, j tels que $1 \leq j \leq k \leq n$.

2) Soit $P \in E$.

a) Démontrer qu'il existe des réels $(a_0, \ldots, a_n)$ tels que $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i P_i$.

b) Démontrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $a_i = P^{(i)}(i)$.

3) On souhaite étudier l'application définie sur E par $u(P)(X) = P'(X+1)$.

a) Démontrer que u est un endomorphisme de E.

b) Soit A la matrice de u dans la base $(P_0, \ldots, P_n)$. Expliciter A. Déterminer le rang de A ainsi que les valeurs propres de A.

c) A est-elle diagonalisable ?

Sujet 4 - Mpetshi Kalongo Ariane

Question courte

Vous aurez une question de cours autour du thème : "diagonalisation : caractérisations".

Exercice : Minimisation d'une intégrale

On souhaite trouver deux réels (a, b) tels que l'intégrale $\int\limits_0^1 (x^2 - (ax+b))^2 dx$ soit minimale. On va utiliser deux méthodes différentes.

1) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(a, b) = \int\limits_0^1 (x^2 - (ax+b))^2 dx$

a) Démontrer que $f(a, b) = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} - \frac{2b}{3} + \frac{a^2}{3} + ab + b^2$, puis montrer que f est de classe c^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer les points critiques de f. En déduire que f admet un minimum local et déterminer sa valeur.

2) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère l'application définie sur $\mathcal{C}^2$ définie par $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt$.

a) Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

b) En utilisant une caractérisation par un projeté orthogonal, retrouver le minimum demandé.

Sujet 5 - Scheidegger Mathilde

Question courte

Vous aurez une question courte sur le thème "Variables aléatoires usuelles : loi, espérance, variance".

Exercice : Etude d'extrema

On considère les fonctions f et F définies respectivement sur $]0,+\infty[$ et $]0,+\infty[^2$ par $f(x) = xe^{-x}$ et $F(x,y) = f(x) + f(y) - f(x+y)$.

1) Montrer que pour tout $a \in]0,+\infty[$, l'équation $f'(x) = f'(a)$ **d'inconnue** x admet au plus une solution distincte de a.

2) a) Démontrer que $]0,+\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b) Démontrer que F est de classe c^2 sur $]0,+\infty[^2$, et calculer les dérivées partielles premières de F en fonction de $f'(x)$, $f'(y)$ et $f'(x+y)$.

c) Déduire des questions précédentes que (x,y) est un point critique de F si et seulement si $x = y$ et $f'(x) = f'(2x)$.

3) a) Montrer que F admet un unique point critique et qu'il est de la forme (α,α) avec $1 < \alpha < 2$.

b) Montrer que $f''(\alpha) < 0$ et $f''(2\alpha) > 0$.

c) Déduire des questions précédentes que F admet un unique extremum local, et déterminer la nature de cet extremum.