Colles Semaine 18 – 10 Février

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours seront fortement sanctionnées.

Sujet 1 - Barbier Sarah

Exercice : La racine carrée revisitée

Soient $A, R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que R est une racine carrée de A si $R^2 = A$. On rappelle que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique positive si elle est symétrique et vérifie $\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad {}^tXSX \geq 0$.

Soit S une matrice symétrique positive.

1) a) Démontrer que les valeurs propres de S sont positives ou nulles.

b) Justifier l'existence d'une matrice P orthogonale telle que la matrice $D = P^{-1}SP$ soit diagonale.

c) Déterminer une racine carrée de S qui soit symétrique positive en fonction de P et des coefficients de D.

2) On va montrer que S admet une unique racine carrée symétrique positive. Soit R une matrice symétrique positive telle que $R^2 = S$.

a) Soit λ une valeur propre de R. Montrer que λ^2 est une valeur propre de S et que l'on a $E_\lambda(R) \subset E_{\lambda^2}(S)$.

b) Soit p le nombre de valeurs propres de R deux à deux distinctes, on notera ces valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_p$. Démontrer :

$$n = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(R)) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i^2}(S)) \leq n$$

c) En déduire que $\lambda_1^2, \dots \lambda_p^2$ sont les seules valeurs propres de S et que l'on a l'égalité des sous-espaces propres $E_\lambda(R) = E_{\lambda^2}(S)$ pour tout $i \in \{1, \dots p\}$.

d) Montrer que la matrice $P^{-1}RP$ est diagonale.

e) En déduire que S admet une unique racine carrée symétrique positive.

Pour aller plus loin : Si nous avons le temps lors de la colle :

- Si on suppose toujours S symétrique positive, mais qu'on recherche maintenant les racines carrées R symétrique. A-t-on encore l'unicité ? Selon vous, combien de racines carrées symétrique admet S ? (On peut commencer par se demander combien de "racines carrées" un nombre réel peut-il avoir)
- Si on suppose maintenant que S est symétrique (non nécessairement positive). A-t-on encore l'existence d'une racine carrée symétrique positive ? D'une racine carrée symétrique ?

Sujet 2 - Battesti Mazarine

Exercice court

Discuter selon la valeur de α de la convergence de la série de terme général $\frac{n^2+2}{n^\alpha+1}$.

Exercice : Calcul d'une série

Soit $x \in [0, 1[$.

1) a) Simplifier, pour tout entier naturel n non nul, et pour tout $t \in [0, x]$, la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

b) En déduire l'égalité : $\sum\limits_{p=1}^{n} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \int\limits_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \int\limits_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = 0$.

d) En déduire que la série $\sum\limits_{p \geq 1} \frac{x^p}{p}$ converge et que $\sum\limits_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p} = -\ln(1-x)$.

2) a) Etablir la convergence de la série de terme général $\sum_{p\geq 1} \frac{x^p}{p(p+1)}$.

b) En utilisant les questions précédentes, démontrer que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^p}{p(p+1)} = x + (1-x)\ln(1-x)$.

Sujet 3 - Baudras Mariette

Exercice court

1) Etudier la convergence et l'absolue convergence de la série de terme général $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{3n+1}\right)$.

2) Déterminer la limite en 0 et en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1}$$

Exercice : Autour d'une fonction définie par une série

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

1) Montrer que pour tout $x \geq 0$, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note alors sa somme $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$. Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

2) Soit $x \geq 0$.

a) Etudier le sens de variation de $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x})dt \leq f_k(x)$$

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$,

$$\int_1^{n+1} (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x})dt \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leq \frac{x}{x+1} + \int_1^{n} (\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x})dt$$

c) Démontrer que

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \frac{x}{x+1} + \ln(1+x)$$

d) En déduire un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Sujet 4 - Waldmann Héloïse

Question courte

Vous aurez une question courte autour du thème : "Matrice de passage, applications linéaires : pratique et théorie".

Exercice : Diagonalisation, puissance, et cetera

On définit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de A.

2) Montrer que A est diagonalisable, puis déterminer une base de vecteurs propres et la matrice de passage, que l'on notera P.

3) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{ll} x_0 & = 1 \\ y_0 & = 0 \\ z_0 & = 0 \end{array}\right. \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{ll} x_{n+1} & = 2y_n - z_n \\ y_{n+1} & = 3x_n - 2y_n \\ z_{n+1} & = z_n + 2(y_n - x_n) \end{array}\right.$$

Sujet 5 - Jaramillo Nicole

Exercice court

Soit E un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que toute base orthonormée de F est incluse dans une base orthonormée de E.

Exercice : Orthonormalisation

Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\varphi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt + P(0)Q(0)$$

1) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2) On suppose dans cette question que $n = 2$.
a) Rappeler la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.
b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. A l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, donner une base orthonormée $\mathcal{B}$ pour ce produit scalaire.
c) Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$, puis celle de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$.