Colles Semaine 2 – 23 Septembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Vago David

Exercice 1 - Poisson probable

On considère une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
1) Montrer que la valeur la plus probable de X est l'entier k tel que $\lambda - 1 \leq k \leq \lambda$.
2) Dans quelles conditions peut-il y avoir deux valeurs (distinctes) plus probables ?

Exercice 2 - Des densités !

On considère U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 2]$. Soit $X = \sqrt{U}$.
1) Rappeler la valeur de l'espérance de U.
2) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
3) En déduire la densité f_X de X.

Sujet 2 - Vallette d'Osia Louise

Question courte

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit E un évènement tel que $\mathbb{P}(E) = 0$. Peut-on en conclure que E est impossible ?

Exercice : Discrétion et continuité

1) Donner la fonction de répartition d'une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre p. La représenter sur un graphique.
2) Soit Y une variable aléatoire de Bernouilli de paramètre p. Soit Z une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose enfin $X = Y + Z$.
a) Calculer l'espérance de X.
b) Donner la fonction de distribution de X. La représenter sur un graphique.

Sujet 3 - Kane Yaye

Problème - Somme de dés

On lance 3 dés non biaisés. L'objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de l'évènement A ="l'un des chiffres indiqués par les dés est égal à la somme des deux autres".

Par exemple, si le lancer des dés donne $(2, 5, 3)$, l'évènement A est réalisé car $2 + 3 = 5$. Ce n'est pas le cas si on obtient $(1, 6, 3)$.

Pour cela on définit 3 variables aléatoires, notées X_1, X_2 et X_3, représentant respectivement le résultat du premier dé, du deuxième dé et du troisième dé.
1) Simplification : Montrer que $\mathbb{P}(A) = 3 \times \mathbb{P}(X_1 + X_2 = X_3)$
2) Calculer $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = X_3)$, puis en déduire $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{24}$.

3) On propose enfin le jeu suivant : Alice mise la somme de 1 euro et lance les trois dés. Si l'un des chiffres indiqués par les dés est égal à la somme des deux autres, elle gagne x euros. Sinon elle ne gagne rien (attention, dans les deux cas, Alice ne récupère pas l'euro qu'elle a mis en jeu).

On pose G la variable aléatoire correspondant au gain d'Alice sur ce jeu.

a) Déterminer le support de G.

b) Quel doit être le montant x de la récompense pour que le jeu soit le plus équitable possible ?

Sujet 4 - Barbier Sarah

Question courte

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mu = 10$ et d'écart-type $\sigma = 5$. Montrer que pour tout $n \geq 50$, la probabilité de l'évènement $\{10 - n < X < 10 + n\}$ est au moins égale à 0.99.

Exercice - France is in the air

A et B sont deux avions[1] ayant respectivement deux et quatre moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié de ses moteurs tombent en panne. Quel avion choisissez-vous ? On discutera en fonction de la valeur de p.

Sujet 5 - Battesti Mazarine

Question courte - Bon anniversaire !

Dans un public de 500 personnes prises au hasard, quelle est la probabilité que 3 personnes exactement soient nées le 23 Septembre ?

Exercice - Des fonctions de répartition

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

1) Montrer que f est une densité de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire de densité f.

a) Déterminer la fonction de répartition de X.

b) On pose $Y = X^2$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y.

c) Mêmes questions pour $Z = e^{-Y}$.

Sujet 6 - Baudras Mariette

Problème : Probabilité de dépassement

1) Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ. On rappelle que l'espérance et la variance de X valent λ (on ne demande pas de démonstration).

a) Montrer que $\mathbb{P}(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

1. Question subsidiaire : de quoi A et B sont les abréviations ?

2) On suppose à présent que Z est une variable aléatoire, d'espérance nulle et de variance σ^2.
a) Montrer que pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{P}\left((Z+x)^2 \geq (a+x)^2\right)$
b) Montrer que pour tout $a > 0$ et pour tout $x \geq 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2+x^2}{(a+x)^2}$
c) Montrer que pour tout $a > 0$, $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}$
d) En déduire que $\mathbb{P}(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda+1}$ Comparer avec le résultat obtenu à la question 1b).