Colles Semaine 18 – 9 et 10 Mars

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours seront fortement sanctionnées.

Sujet 1 - Hosni Tej

Question courte

Etudier la nature de la série de terme général u_n pour $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$.

Exercice : Autour de matrices aléatoires

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on considère la matrice $A(x, y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que $A(x, y)$ est diagonalisable si et seulement si $x^2 > y$.

2) On considère maintenant deux variables aléatoires X et Y, définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, qui suivent toutes deux la loi uniforme sur $[0, 1]$. On admet que X^2 et $-Y$ sont des variables aléatoires à densité.

a) Déterminer une densité de la variable alétoire $-Y$.

b) Déterminer une densité de la variable aléatoire X^2

c) Déterminer une densité de la variable aléatoire $X^2 - Y$.

b) En déduire la probabilité que la matrice $A(X, Y)$ soit diagonalisable.

Sujet 2 - Vasseur Gaston

Question courte

Vous aurez une question courte autour du thème "Séries numériques : séries de référence, preuves de convergence".

Exercice : Division de polynômes

On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, et on note (e_0, e_1, e_2) sa base canonique. On considère l'application f qui, à un polynôme $P \in E$, associe le reste de la division euclidienne de $(1 - X + X^2)P$ par $1 + X^3$. Par conséquent, il existe un unique polynôme Q tel que $(1-X+X^2)P = (1+X^3)Q + f(P)$, avec $\deg(f(P)) \leq 2$.

1) Démontrer que f est un endomorphisme de E.

2) a) Calculer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

b) Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, puis donner en une base.

3) a) Calculer $f(P)$ pour $P \in \mathrm{Im}(f)$. En déduire que 3 est valeur propre de f.

b) Démontrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f - 3Id)$.

c) En déduire que f est diagonalisable.

Sujet 3 - Narod Tareq

Exercice : Calcul d'une intégrale

Soient a et b deux réels strictement positifs.
1) Etablir la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$$

On notera à présent $I(a,b)$ sa valeur. Peut-on utiliser la linéarité de l'intégrale ici pour calculer directement $I(a,b)$? Justifier.
2) Soient ϵ et X deux réels strictement positifs, avec $\epsilon \leq X$.
a) Démontrer que :

$$\int_\epsilon^X \frac{e^{-ax}}{x} dx = \int_{a\epsilon}^{aX} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

b) Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(0) = 1$ et $\forall y > 0, h(y) = \frac{1-e^{-y}}{y}$. Démontrer que h est continue sur $[0, +\infty[$.
c) En déduire que :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-y}}{y} dy = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

d) Démontrer que :

$$\int_0^X \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \int_{aX}^{bX} \frac{e^{-y}}{y} dy$$

e) En déduire que $I(a,b) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.
3) Application : Justifier la convergence, puis en utilisant un changement de variable soigneusement justifié, démontrer :

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$$

Sujet 4 - Vago David

Exercice 1 : Un calcul d'intégrale

1) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \ln(x^2 - 1)$.
2) Etablir la convergence de l'intégrale suivante, puis en utilisant la question précédente, calculer sa valeur :

$$\int_{\ln(3)}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1 + e^t}}$$

Exercice 2 : Orthonormalisation

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soit φ définie sur $E \times E$ par $\varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.
1) Justifier que φ est un produit scalaire.
2) Déterminer une base orthonormée de E relativement au produit scalaire φ.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soient u et v deux endomorphismes de E. On suppose que u possède n valeurs propres distinctes.

Démontrer que $v \circ u = u \circ v$ si et seulement si les vecteurs propres de u et de v sont les mêmes.

Sujet 5 - Vallette d'Osia Louise

Exercice 1 : Projections

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants : $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}_3, x + y + z = 0\}$ et $K = \text{Vect}((1, 1, 2))$.

a) Déterminer une base de H.

b) Démontrer que $\mathbb{R}^3 = H \bigoplus K$. On note alors π_H la projection sur H parallèlement à K, et s_H la symétrie par rapport à H parallèlement à K.

c) Que vaut $2\pi_H - s_H$?

d) Déterminer la matrice de π_H, puis celle de s_H, dans la base canonique de $\mathbb{R}_3$.

Exercice 2 : Etude d'un endomorphisme

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle fixée. On considère l'application f définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = \text{Tr}(A)M - \text{Tr}(M)A$.

1) Montrer que f est un endomorphisme non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on pourra distinguer les cas $\text{Tr}(A) = 0$ et $\text{Tr}(A) \neq 0$).

2) Démontrer que $f \circ f = \text{Tr}(A)f$. En déduire les valeurs propres possibles de f.

3) Montrer que 0 est valeur propre de f. En déduire que si $\text{Tr}(A) = 0$, f n'est pas diagonalisable.

4) a) Déterminer la dimension de $\text{Ker}(\text{Tr})$.

b) En déduire que si $\text{Tr}(A) \neq 0$, alors f est diagonalisable.

Sujet 6 - Kane Yaye

Exercice : Un problème d'urnes

On dispose de n urnes ($n \geq 3$) numérotées de 1 à n dans lesquelles on répartit, au hasard et de façon indépendante, m boules indiscernables ($m \geq 4$), de telle sorte que pour tout entier i de $\{1, \dots, n\}$, la probabilité pour chaque boule d'être placée dans l'urne i soit égale à $1/n$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on définit une variable aléatoire X_i telle que :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si l'urne } i \text{ est vide à l'issue de l'expérience} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose enfin $W_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. (Toutes ces variables sont définies sur un même espace probabilisé).

1) a) Déterminer pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la loi de X_i.

b) Pour tout couple (i, j) d'entiers de $\{1, \dots, n\}$ distincts, calculer $\mathbb{P}((X_i = 1) \cap (X_j = 1))$. En déduire que les variables aléatoires X_i et X_j ne sont pas indépendantes.

Indication : Pour la non-indépendance, on pourra utiliser le fait que l'application f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^m$ est une bijection.

c) Calculer la covariance de X_i et X_j.

2) a) Expliquer rapidement ce que représente la variable aléatoire W_n.

b) Exprimer l'espérance de W_n en fonction de n et m, que l'on notera $\mathbb{E}(W_n)$.

c) Calculer la variance de W_n en fonction de n et m.

Sujet 7 - Waldmann Héloïse

Question courte

Vous aurez une question courte autour du thème : "Matrice de passage, applications linéaires : pratique et théorie".

Exercice : Diagonalisation, puissance, et cetera

On définit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Démontrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2, -4\}$.
2) Montrer que A est diagonalisable, puis déterminer une base de vecteurs propres et la matrice de passage, que l'on notera P.
3) Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 &= 1 \\ y_0 &= 0 \\ z_0 &= 0 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} &= 2y_n - z_n \\ y_{n+1} &= 3x_n - 2y_n \\ z_{n+1} &= z_n + 2(y_n - x_n) \end{cases}$$

Sujet 8 : Vasseur Gaston

Exercice : Etude d'une intégrale

Pour n un entier naturel non nul, on pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie.
2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$v_n = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx \quad \text{et} \quad w_n = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x + \frac{1}{n}} dx$$

a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq w_n \leq \frac{1}{e}$.
b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \geq \frac{1}{e}\ln(n+1)$.
c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3) a) Montrer la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x} dx$$

b) On note I la valeur de l'intégrale précédente. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x+\frac{1}{n}} dx \leq I$$

c) En déduire un encadrement de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis un équivalent simple de u_n quand n tend vers l'infini.

Sujet 9 : Courty Romain

Exercice : Chemins sur un cube

1) Factoriser le polynome $X^4 - 10X^2 + 9$.

2) Soit A la matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) En utilisant la question précédente, déterminer les réels λ tels que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_4) \neq \{0\}$.

b) En déduire que A est diagonalisable, puis déterminer les valeurs propres de A et les sous-espaces propres correspondants.

c) Justifier l'existence, puis donner l'expression d'une matrice P inversible telle que :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On ne demande pas le calcul de P^{-1}.

3) Application : Soit un cube dans $\mathbb{R}^3$ et n un entier positif. On souhaite compter le nombre de chemins formés de n arêtes du cube reliant deux sommets donnés. Pour ceci nous allons distinguer 4 types de paires de sommets : on peut avoir deux sommets confondus (cas 1), deux sommets formants une arête (cas 2), deux sommets formants une diagonale d'une face (cas 3), ou enfin deux sommets formants une diagonale du cube (cas 4). On note $c_i(n)$ le nombre de chemins formés de n arêtes entre deux sommets fixés situés dans la configuration i.

a) Calculer les $c_i(0)$, puis les $c_i(1)$.

b) Justifier les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} c_1(n+1) & = 3c_2(n) \\ c_2(n+1) & = c_1(n) + 2c_3(n) \\ c_3(n+1) & = 2c_2(n) + c_4(n) \\ c_4(n+1) & = 3c_3(n) \end{cases}$$

c) En utilisant la question précédente, déterminer l'expression de $c_i(n)$ pour tout i et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
