Colles Semaine 21 – 16 Mars

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours seront fortement sanctionnées.

Sujet 1 - Pitavy Emilien

Exercice : Endomorphisme envoyant tout vecteur sur un vecteur orthogonal

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit u un endomorphisme de E tel que pour tout $x \in E$, $\langle u(x), x \rangle = 0$.

- 1) Démontrer que pour tous x et y dans E , on a $\langle u(x), y \rangle = -\langle x, u(y) \rangle$.
- 2) Démontrer que $\text{Im}(u) = (\text{Ker}(u))^\perp$.
- 3) On suppose à partir de maintenant que u n'est pas l'endomorphisme nul.
 - a) Vérifier que $\text{Im}(u)$ est stable par u .
 - b) Déduire des questions précédentes qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

où A est un élément de $\text{GL}_k(\mathbb{R})$ avec $1 \leq k \leq n$.

- c) Plus précisément, démontrer que A est antisymétrique (c'est-à-dire que ${}^t A = -A$).
-

Sujet 2 - Ribière Anaïs

Exercice : Noyaux et images supplémentaires

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On étudie dans cet exercice quelques cas où $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

1) Cas d'une symétrie : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

- a) Déterminer s^2 .
- b) En déduire que $E = \text{Ker}(s) \oplus \text{Im}(s)$.

2) Cas diagonalisable : On suppose maintenant que f est un endomorphisme diagonalisable.

a) Traiter le cas où f est un automorphisme, puis le cas où f est l'endomorphisme nul. On suppose dans la suite de cette question que f est non bijectif et non nul.

- b) Démontrer que 0 est une valeur propre de f . Démontrer que f a d'autres valeurs propres que 0.
- c) Démontrer que pour toute valeur propre λ non nulle, on a $E_\lambda(f) \subset \text{Im}(f)$.
- d) En déduire que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

3) Avec un polynôme annulateur : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur de la forme $P = a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_d X^d$ avec $a_1 \neq 0$ et $p \geq 1$.

- a) Soit $y \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $f^k(y) = 0$. En déduire la valeur de y .
 - b) Conclure.
-

Sujet 3 - Souchois Mélanie

Exercice : Etude d'une suite

Soit $a \in \mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique (e_1, e_2) . On définit A la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$$

On définit également une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \geq 0, u_{n+2} = (1+a)u_{n+1} - au_n$.

On définit enfin U_n le vecteur $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles A est diagonalisable.

2) On suppose que A est diagonalisable.

a) Calculer A^n pour tout entier naturel n .

b) Exprimer U_{n+1} en fonction de U_n et A . En déduire une expression du terme général de u_n en fonction de u_0, u_1 et a .

3) On suppose maintenant que A n'est pas diagonalisable.

a) Soit v_1 un vecteur propre associé à la seule valeur propre de A . Déterminer un réel λ tel que, si P est la matrice de passage de la base canonique vers la base $(\lambda v_1, e_1)$, alors

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T$$

(On vérifiera en particulier que $(\lambda v_1, e_1)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.)

b) Calculer T^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de u_n .

Sujet 4 - Dufour Dimitri

Exercice : Nombre de séries lors de lancers de pièces

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce équilibrée. On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont donné le même côté de la pièce et le $(n+1)$ -ième l'autre côté. De même, la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine (si elle se termine) au lancer précédent un changement de côté. On définit de la même manière les séries suivantes.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'événement "le i -ème lancé donne pile" et F_i l'événement "le i -ème lancé donne face". On note N_n la variable aléatoire correspondant au nombre de séries lors des n premiers lancers.

Par exemple, si les lancers successifs donnent **PPFFFFPPF...** (**P** désignant pile et **F** face), on a pour une telle succession $\omega \in \Omega$,

$$N_1(\omega) = N_2(\omega) = 1, \quad N_3(\omega) = N_4(\omega) = N_5(\omega) = 2, \quad N_6(\omega) = N_7(\omega) = 3, \quad N_8(\omega) = 4$$

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque, déterminer $N_n(\Omega)$, puis calculer $\mathbb{P}(N_n = 1)$ et $\mathbb{P}(N_n = n)$.

2) On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in [0, 1]$, la fonction génératrice de N_n :

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(N_n = k) s^k$$

a) Que représente $G'_n(1)$?

b) Démontrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \{1, \dots, n\}$ on a :

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap P_n) = \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap P_{n-1}) + \frac{1}{2} \mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$$

On admet que l'on peut démontrer la formule similaire :

$$\mathbb{P}((N_n = k) \cap F_n) = \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k) \cap F_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}((N_{n-1} = k-1) \cap F_{n-1})$$

c) Démontrer la formule :

$$\mathbb{P}(N_n = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(N_{n-1} = k-1)$$

d) En déduire que $G_n(s) = \frac{1+s}{2}G_{n-1}(s)$, puis en calculant $G_1(s)$, démontrer :

$$G_n(s) = s \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1}$$

e) En utilisant 3a), déterminer le nombre moyen de séries dans les n premiers lancers.

Sujet 5 - Girier-Dufournier Jehan

Exercice : Autour d'une matrice

On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique usuel. Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & a+b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer trois matrices I , J et K dont les coefficients ne dépendent pas de a , b et c , telles que $M(a, b, c) = aI + bJ + cK$. En déduire que l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension et une base.

b) Calculer K^2 et K^3 . Déterminer un polynôme annulateur de K .

2) a) Quelles sont les valeurs propres possibles pour K ?

b) Démontrer qu'il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $D = {}^tPKP$ soit une matrice diagonale telle que l'on ait en plus $d_{1,1} < d_{2,2} < d_{3,3}$. Déterminer explicitement D et P .

3) On cherche à résoudre l'équation $A^2 = K$ d'inconnue $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Soit A une telle solution (s'il en existe). Montrer que A et K commutent. En déduire que si X est propre pour K et λ , alors AX est également propre pour K et λ .

b) En déduire que la matrice $\Delta = {}^tPAP$ est diagonale, où P est la matrice introduite en 2b). Exprimer Δ^2 en fonction de D .

c) Donner le nombre de solutions de l'équation $A^2 = K$. Comment généraliser à $A^n = K$, où $n \in \mathbb{N}^*$?

Sujet 6 - Gounot Thomas

Exercice : Autour d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. On définit $\phi : E \rightarrow E$ l'application qui, à tout polynôme P de E , associe le polynôme $\phi(P) = ((X^2 - 1)P)''$, qui désigne le polynôme dérivée seconde de $(X^2 - 1)P$.

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .

2) Ecrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E . Montrer que ϕ admet $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes que l'on notera $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n$. En déduire que ϕ est diagonalisable, et donner la dimension des sous-espaces propres associés aux λ_k .

3) Soient $k \in \{0, \dots, n\}$ et P un vecteur propre pour ϕ et λ_k .

a) Montrer que $\deg(P) = k$.

b) En déduire qu'il existe une unique base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ de E constituée de vecteurs propres pour ϕ telle que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, P_k est un polynôme de degré k de coefficient dominant 1.

4) a) Justifier que l'application $(P, Q) \mapsto \int_{-1}^1 (1-x^2)P(x)Q(x)dx$ est un produit scalaire sur E

b) Montrer que ϕ est un endomorphisme symétrique de E .

c) Montrer que la base $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est orthogonale pour ce produit scalaire.