Colles Semaine 22 – 23 Mars

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours seront fortement sanctionnées.

Sujet 1 - Kheddar Heddy

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}x_k^2+\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)^2-\sum_{k=1}^{n}x_k$$

1) Montrer que f est de classe c^2 sur $\mathbb{R}^n$, puis calculer les dérivées partielles premières et secondes de f.

2) a) Démontrer que f admet un seul point critique, noté M_n que l'on déterminera.

b) Vérifier que la hessienne de f en M_n est la matrice $H_n = 2(I_n + J_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

3) a) Calculer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n, puis déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

b) Soit e_n le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. En calculant le produit J_ne_n, déterminer les valeurs propres de J_n. En déduire les valeurs propres de H_n.

c) Démontrer finalement que f admet un minimum local en M_n et calculer la valeur de ce minimum.

Sujet 2 - Paillard-Brunet Garance

Soit H la matrice suivante :

$$H=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-2&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

1) Montrer que H est diagonalisable.

2) a) Déterminer les valeurs propres de H.

b) Déterminer une base de vecteurs propres de H. Montrer que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

3) Soit f la fonction définie sur $D = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times]1,+\infty[$ par :

$$f(x,y,z)=x\ln(1+z)+(y-1)^2(z-1)+2z$$

a) Justifier que f est de classe c^2 sur D.

b) Montrer que f admet un seul point critique que l'on notera M_0.

c) Montrer que la hessienne de f au point M_0 est H. En déduire la nature du point critique M_0.

Sujet 3 - Rharbaoui Yacine

Exercice court

La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice : Etude d'une fonction de deux variables

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.
1) Montrer que f est de classe c^2 sur $\mathbb{R}^2$.
2) a) Déterminer le gradient de f. En déduire les points critiques de f.
b) Déterminer la hessienne de f en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
c) Soit q la forme quadratique associée à la hessienne de f au point $(0,0)$. Démontrer que q est positive. Peut-on conclure que f admet un extremum en $(0,0)$?
d) Etudier le signe de $f(x,x)$ et de $f(x,-x)$. f admet-elle un extremum en $(0,0)$?

Sujet 4 - Maaoui Abir

1) Soient x et y deux réels tels que $x^3 = y^3$. Que peut-on dire de x et y ?
Le but de cet exercice est de voir si cette propriété reste vraie pour certains endomorphismes d'un espace vectoriel réel.
2) Dans cette question, on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer u^3. Que peut-on en conclure ?
3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables, vérifiant $u^3 = v^3$. On notera $\mu_1, \dots \mu_p$ les valeurs propres (distinctes) de v. On notera enfin $E_{\mu_j}(v)$ le sous-espace propre de v associé à la valeur propre μ_j.
a) Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre pour u associé à λ. Justifier l'existence de p vecteurs $x_1, \dots x_p$ tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $x_j \in E_{\mu_j}(v)$ et tels que $x = \sum_{j=1}^{p} x_j$. A-t-on l'unicité de ces vecteurs ?
b) Démontrer que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a $\mu_j x_j = \lambda x_j$. En déduire que u et v coïncident sur $E_\lambda(u)$.
c) En déduire que $u = v$.
d) Laquelle des hypothèses de cette question n'était pas satisfaite dans la question 2 ? Justifier.

Sujet 5 - Mpetshi Kalongo Ariane

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1) a) Calculer A^2, puis A^3. En déduire un polynôme annulateur de f.
b) Déterminer les valeurs propres de f.
c) f est-il diagonalisable ?
2) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) a) Démontrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f^2) \bigoplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

On souhaite montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2 = f$. Supposons pour cela l'existence d'un tel endomorphisme.

b) Démontrer que g et f commutent.

c) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Ker}(f-2\mathrm{Id})$ sont stables par g. En déduire que la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ da la question 2 est de la forme :

$$G = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

d) En utilisant la matrice T, obtenir une contradiction.

Sujet 6 - Scheidegger Mathilde

Exercice court

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire fixée. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M - \phi(M)A$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.

Exercice : Etude d'une série

On s'intéresse dans cet exercice à la nature de la série de terme général $\frac{1}{k\ln(k)}$, pour $k \geq 2$.

1) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $\int\limits_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

2) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$.

3) En déduire la nature de la série.

4) Montrer plus précisement l'équivalent : $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$
