Colles Semaine 23 – 30 Mars

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée. Certains sujets comportent des questions de cours. La non-connaissance des définitions ou des propriétés fondamentales du cours seront fortement sanctionnées.

Sujet 1 - Agresti Lucas

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
1) On suppose dans cette question que f est diagonalisable.
a) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de vecteurs propres de f. Exprimer les espaces $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ en fonction des e_i. (On pourra distinguer les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 des autres).
b) En déduire que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires.
2) On considère maintenant f un endomorphisme quelconque de E.
a) Démontrer que pour tout entier naturel l non nul, $\text{Ker}(f^l) \subset \text{Ker}(f^{l+1})$.
b) En déduire qu'il existe un entier naturel k non nul tel que $\forall l \geq k$, $\text{Ker}(f^l) = \text{Ker}(f^k)$.
Indication : On pourra commencer par montrer qu'il existe un k tel que $Ker(f^{k+1}) = Ker(f^k)$.
c) Démontrer que pour cette valeur de k, $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Im}(f^k)$ sont supplémentaires.
3) Soit u l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, qui a tout polynôme P associe le polynôme P'.
a) Vérifier que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
b) Existe-t-il un entier k non nul tel que $\text{Ker}(f^k)$ et $\text{Im}(f^k)$ soient supplémentaires ?

Sujet 2 - Lallement Lottie

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier la convergence et calculer l'intégrale $I_n = \int\limits_0^1 x^n \ln(x) dx$.
b) Même question avec $I = \int\limits_0^1 x^2 (\ln(x))^2 dx$.
2) a) Soit E l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Démontrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $E \times E$ par $\langle f, g \rangle = \int\limits_0^1 x^2 f(x) g(x) dx$ est un produit scalaire sur E.
b) En utilisant une projection orthogonale, caractériser, à l'aide de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, le couple de réels (a, b) tel que la valeur de l'intégrale $\int\limits_0^1 x^2 (\ln(x) - ax - b)^2 dx$ soit minimale. (On vérifiera tout d'abord que ces intégrales sont bien définies)
c) En utilisant tout ce qui précède, calculer :

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 (\ln(x) - ax - b)^2 dx$$

Sujet 3 - Bancq Alexia

On rappelle la trace d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie comme étant la somme de ses coefficients diagonaux.
1) Vérifier que pour toutes matrices A et B, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
2) Soient $m > 0$ et $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$. Démontrer que :

$$(x_1 + \cdots + x_m)^2 \leq m(x_1^2 + \cdots + x_m^2)$$

Indication : On rappelle que $\mathbb{R}^m$ est un espace euclidien.

3) Dans cette question, on prend A une matrice réelle symétrique.

a) Démontrer qu'il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale, de la forme $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $A = PD^tP$.

b) Montrer que $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

c) On suppose à partir de maintenant que A n'est pas la matrice nulle. Démontrer que $\text{tr}(A^2) > 0$.

d) Déduire des questions précédentes que :

$$\text{rang}(A) \geq \frac{(\text{Tr}(A))^2}{\text{Tr}(A^2)}$$

Sujet 4 - Waldmann Héloïse

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et k un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher. On procède dans cette urne à des tirages successifs d'une boule avec remise, et on arrête les tirages dès que l'on a obtenu k boules consécutives portant le même numéro. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir l'arrêt des tirages (on admet au passage que T est bien une variable aléatoire).

1) a) Déterminer le suport de T, noté $T(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}(T = k)$, puis $\mathbb{P}(T = k + 1)$.

c) Calculer $\mathbb{P}(T = k + 2)$.

2) a) Montrer que pour tout entier naturel m, on a : $(T = m + k) \subset (T > m)$.

b) En déduire que $\mathbb{P}(T = m + k) = \frac{N-1}{N^k}\mathbb{P}(T > m)$.

c) En déduire que, pour tout $n \geq k + 1$:

$$\mathbb{P}(T = n + 1) = \mathbb{P}(T = n) - \frac{N - 1}{N^k}\mathbb{P}(T = n - k + 1)$$

d) Donner une interprétation de ce dernier résultat.

Sujet 5 - Jaramillo Nicole

On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit S une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet n valeurs propres réelles deux à deux distinctes, que l'on notera $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On se fixe également k un entier naturel **impair**.

1) Démontrer qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}SP$ soit une matrice diagonale, que l'on notera D.

2) Soit f l'application de E dans $\mathbb{R}^n$ qui a tout polynôme Q fait correspondre :

$$f(Q) = (Q(\lambda_1^k), \ldots, Q(\lambda_n^k))$$

a) Démontrer que f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $U \in E$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $U(\lambda_i^k) = \lambda_i$.

c) Démontrer que le polynôme $R(X) = U(X^k) - X$ est un polynôme annulateur de D, puis de S.

3) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AS^k = S^kA$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel i, $AS^{ik} = S^{ik}A$.

b) En utilisant 2c), en déduire que A et S communtent.

Sujet 6 - Maaoui Abir

1) Soient x et y deux réels tels que $x^3 = y^3$. Que peut-on dire de x et y ?

Le but de cet exercice est de voir si cette propriété reste vraie pour certains endomorphismes d'un espace vectoriel réel.

2) Dans cette question, on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Déterminer u^3. Que peut-on en conclure ?

3) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient u et v deux endomorphismes de E diagonalisables, vérifiant $u^3 = v^3$. On notera $\mu_1, \dots \mu_p$ les valeurs propres (distinctes) de v. On notera enfin $E_{\mu_j}(v)$ le sous-espace propre de v associé à la valeur propre μ_j.

a) Soit λ une valeur propre de u et x un vecteur propre pour u associé à λ. Justifier l'existence de p vecteurs $x_1, \dots x_p$ tels que, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, $x_j \in E_{\mu_j}(v)$ et tels que $x = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j$. A-t-on l'unicité de ces vecteurs ?

b) Démontrer que pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$, on a $\mu_j x_j = \lambda x_j$. En déduire que u et v coïncident sur $E_\lambda(u)$.

c) En déduire que $u = v$.

d) Laquelle des hypothèses de cette question n'était pas satisfaite dans la question 2 ? Justifier.

Sujet 7 - Scheidegger Mathilde

Exercice court

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit A une matrice fixée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire fixée. On définit l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(M) = M - \phi(M)A$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\phi(A)$ pour que f soit bijective.

Exercice : Etude d'une série

On s'intéresse dans cet exercice à la nature de la série de terme général $\frac{1}{k\ln(k)}$, pour $k \geq 2$.

1) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $\int\limits_{k}^{k+1} \frac{dt}{t\ln(t)} \leq \frac{1}{k\ln(k)}$.

2) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \geq \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2))$.

3) En déduire la nature de la série.

4) Montrer plus précisement l'équivalent : $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$
