Colles Semaine 3 – 30 Septembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Kheddar Heddy

Exercice 1

Etudier la nature de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\cos(4x)dx$$

Exercice 2

1) Soit f une fonction croissante, de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int\limits_0^1 f(t)dt$ converge. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(t)dt$$

.

2) Application au calcul d'équivalents de sommes de séries :
On considère la série de terme général $\sum k^{\alpha-1}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
a) Rappeler pour quelles valeurs de α la série converge.
b) Montrer que si $\alpha > 0$, alors $\sum\limits_{k=1}^{n-1} k^{\alpha-1} \sim \frac{n^\alpha}{\alpha}$
c) Rappeler l'équivalent de cette même somme dans le cas où $\alpha = 0$ (on ne demande aucune démonstration).

Sujet 2 - Paillard-Brunet Garance

Exercice 1

Montrer que l'intégrale suivante converge :

$$\int_1^{+\infty} \frac{2t\ln(t)}{(1+t^2)^2}dt$$

Exercice 2

Soit a un réel strictement positif.
1) Etablir la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

On note $\phi(a)$ sa valeur. On rappelle que $\phi(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
2) a) Calculer $\phi(1)$.
b) Montrer que $\phi(a+2) = (a+1)\phi(a)$.
Indication : On pourra utiliser une intégration par parties soigneusement justifiée.
c) Pour tout entier naturel n, exprimer $\phi(a+2n)$ en fonction de $\phi(a)$.
d) En déduire la valeur de $\phi(n)$ pour tout entier naturel n.

Sujet 3 - Rharbaoui Yacine

Exercice 1

Etudier la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}\,\sin(1/t^2)}{\log(1+t)}dt$$

Exercice 2

Soit f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, qui a un polynôme P associe $f(P) = P - XP'$.
1) Montrer que f est linéaire.
2) Déterminer le noyau et l'image de f.

Sujet 4 - Vago David

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(5t)-\sin(3t)}{t^{\frac{5}{3}}}dt$$

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
1) Vérifier que $\mathrm{Ker}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u^2)$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2) \iff \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{\vec{0}\}$

Sujet 5 - Vallette d'Osia Louise

1) Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t}dt$$

est convergente.
On peut alors poser f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+xe^t}dt$$

2) Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) On s'intéresse maintenant aux limites de f.
a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis donner un équivalent de $f(x)$ au voisinage de $+\infty$.
b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Sujet 6 - Kane Yaye

Exercice 1

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$$

Montrer que u est linéaire et donner une base de son noyau.

Exercice 2

Montrer que l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, et que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

Indication : on pourra effectuer une intégration par parties de manière rigoureuse.