Colles Semaine 4 – 7 Octobre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Pitavy Emilien

Exercice 1

Déterminer, selon les valeurs des réels a, b, c et d, le rang de la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : une comparaison série-intégrale

Soit f une fonction définie, de classe c^1 sur $[1;+\infty[$.
1) Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$f(n) - \int_n^{n+1} f(t)dt = \int_n^{n+1} (t-n-1)f'(t)dt$$

2) On suppose de plus que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f'(t)|dt$ est convergente.

Montrer que dans ce cas, la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge si et seulement si $\int_1^n f(t)dt$ admet une limite.

3) Application : Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(\ln(n))}{n}$. (On pourra utiliser la fonction $\phi(x) = e^x$ pour faire un changement de variable dans une intégrale).

Sujet 2 - Ribière Anaïs

Exercice 1

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{e^t - 1}} dt$$

Exercice 2

On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif est de calculer A^n de deux manières différentes.
1) Récurrence : Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Méthode directe : On pose $B = A - I$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer B^n pour tout entier naturel n. En déduire l'expression de A^n.

Sujet 3 - Souchois Mélanie

Exercice 1

Une application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ peut-elle être injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

1) Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.
2) Calculer J_1 et montrer que pour tout $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de J_n.
3) Montrer en utilisant une intégration par parties que

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}$$

4) En déduire que la suite (I_n) converge et donner sa limite.
5) Déterminer enfin un équivalent de I_n.

Sujet 4 - Dufour Dimitri

Exercice 1

Etudier la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^t - e^{-t}}$$

Exercice 2 : Somme directe et contre-exemple en dimension infinie

1) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$\mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = E \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g) = E \qquad (\star)$$

Montrer que ces deux sommes sont directes.

2) On considère maintenant l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Soit Γ l'endomorphisme de E défini par : $\Gamma(P) = P''$.

a) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Gamma)$ et $\mathrm{Im}(\Gamma)$.

b) Construire une application linéaire g telle que Γ et g vérifient la relation $(\star)$ et qu'aucune des deux sommes ne soit directe.

Sujet 5 - Girier-Dufournier Jehan

Problème : un endomorphisme sur un espace de fonctions

Soit E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe c^∞ sur $\mathbb{R}$ et telles que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k-ième de f, que l'on note $f^{(k)}$, est bornée sur $\mathbb{R}$. On rappelle en particulier que $f^{(0)} = f$

On définit une application u sur E par : $u(f) = f + f'$.

Enfin, pour tout $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|, x \in \mathbb{R}\}$.
1) Montrer que E est un espace vectoriel et que u est un endomorphisme de E.
2) Pour $g \in E$, on pose $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-v} g(x-v)dv$.
a) Déterminer le domaine de définition de G.
b) Montrer que G est bornée sur son domaine de définition.
c) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et trouver une relation entre G, G' et g (On pourra utiliser un changement de variable). En déduire que $G \in E$.
d) En déduire que u est surjectif.
On pourrait également montrer que u est injectif, ce qui en fait donc un automorphisme de E).

Sujet 6 - Gounot Thomas

Exercice 1

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} e^{1/t^2} dt \qquad \text{et} \qquad \int_0^{+\infty} \sin(t) dt$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$.
1) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente. On note I sa valeur.
2) Trouver deux réels a et b tels que $\forall x \geq 0, f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.
3) En déduire la valeur de I.