# Colles Semaine 5 – 14 Octobre

*Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.*

## Sujet 1 - Courty Romain

### Exercice 1 - Autour des matrices de rang 1

On s'intéresse dans cet exercice à différentes propriétés des matrices de rang 1.

Dans tout l'exercice, $A$ désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$, on note ${}^t x$ le vecteur ligne $(x_1, \dots, x_n)$. On rappelle que si $x$ et $y$ sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$, alors on peut considérer les produits suivants :

$$Ax \in \mathbb{C}^n, \qquad x{}^t y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \qquad {}^t xy = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{C}$$

1) Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes $x$ et $y$ de $\mathbb{C}^n$ non nuls tels que :

$$A = x{}^t y$$

Cette décomposition est-elle unique ?
2) Déterminer l'image de $A$ et le noyau de $A$ en fonction des vecteurs $x$ et $y$.
3) Déterminer la trace de $A$, notée $\mathrm{Tr}(A)$ en fonction de $x$ et $y$. Déduire de la question 1 que pour toute matrice $A$ de rang 1 :

$$A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$$

4) En déduire quelles sont les valeurs propres possibles pour $A$.

### Exercice 2

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire $S$ stable par $f$, alors nécessairement $S = \mathrm{Im}(f)$.

---

## Sujet 2 - Rouane Brice

### Question courte

Déterminer la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$$

### Problème - Autour de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(F_n)$ définie par la relation de récurrence : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ pour $n \geq 1$, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. On établit dans cet exercice un équivalent de $(F_n)$ grâce à l'algèbre linéaire.
0) Calculer $F_2$ et $F_3$.
1) Déterminer une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que pour tout n $\geq 1$ :

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$$

En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$ :

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$$

2) Montrer que $A$ admet deux valeurs propres distinctes que l'on note $\lambda_1$ et $\lambda_2$, avec $\lambda_1 < \lambda_2$. Quelle est la dimension de chacun de ces sous-espaces propres ?

3) Trouver des vecteurs propres $e_1$ et $e_2$ associés aux valeurs propres $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

4) Déterminer les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$ dans la base $(e_1, e_2)$, que l'on notera $x_1$ et $x_2$.

5) Montrer que $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = \lambda_1^n x_1 e_1 + \lambda_2^n x_2 e_2$.

6) En déduire que une expression de $F_n$ en fonction de $n$ et des $\lambda_i$, puis finalement un équivalent de $F_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

---

# Sujet 3 - Hosni Tej

## Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$$

.

1) Vérifier que $f$ est linéaire.
2) Déterminer une base du noyau de $f$.
3) Calculer le rang de $f$, puis déterminer une base de l'image de $f$.

## Exercice 2

Soit $f$ un endomorphisme de $E$ qui laisse toute droite invariante, c'est à dire que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Montrer que $f$ est une homothétie (autrement dit que le facteur $\lambda_x$ ne dépend pas de $x$).

---

# Sujet 4 - Bonnin Clémence

## Exercice 1

Soit $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer les valeurs propres de $A$
2) Déterminer pour chaque valeur propre le sous-espace propre associé.

### Exercice 2 : Inverse d'une matrice

1) Soit $A$ une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $I_n$ la matrice identité.

a) Montrer qu'il existe un entier $p$ tel que la famille $(I_n, A, A^2, \ldots, A^p)$ soit liée.

b) En déduire que l'inverse de $A$ est un polynôme en $A$, c'est à dire qu'il existe un polynôme $P$ tel que $A^{-1} = P(A)$.

2) On suppose maintenant qu'il existe un polynôme $P$ tel que pour toute matrice $A$ inversible $A^{-1} = P(A)$. On pose $Q$ le polynôme tel que $Q(X) = XP(X) - 1$.

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on a $Q(\lambda) = 0$. Conclusion ?

*Indication : On pourra s'intéresser à la matrice* $\lambda I_n$

---

## Sujet 5 - Delille Apolline

### Question courte

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente (c'est-à-dire telle qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$). Montrer que la seule valeur propre possible pour $A$ est 0.

### Exercice

Soit $A$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $B = {}^tAA$.

1) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que ${}^tYY = 0 \Longleftrightarrow Y = 0$.

2) Soit $Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $BY = 0 \Longleftrightarrow AY = 0$.

3) En déduire que $\text{rang}(A) = \text{rang}({}^tAA)$.

4) En considérant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, montrer que le résultat démontré à la question précédente n'est pas vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---