Colles Semaine 6 – 10 Novembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Agresti Lucas

Question courte

Que peut-on dire de la somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme en dimension finie ?

Exercice

1) On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & m_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer par récurrence sur p que pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $M^p e_i = 0$.

b) En déduire que la matrice M est nilpotente, c'est à dire qu'il existe un entier naturel q tel que $M^q = 0$.

2) Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer M^p pour tout entier $p \geq 1$.

Sujet 2 - Lallement Lottie

Exercice : Matrices de carré nul

L'objectif de cet exercice est de trouver toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = 0$.

Soit A une matrice telle que $A^2 = 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

1) a) Montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.

b) Soit r le rang de A (qui est aussi le rang de f). Montrer que $r \leq n/2$.

2) a) Que dire à propos de A si $r = 0$?

b) On suppose à présent que $r > 0$. On se donne une base de $\text{Im}(f)$ que l'on note $(e_1, \dots, e_r)$.

Construire à partir de cette base une base B dans laquelle f a pour matrice la matrice par blocs :

$$M_r = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ où } I_r \text{ désigne la matrice identité de } \mathcal{M}_r(\mathbb{R}).$$

On a donc montré que A est semblable à la matrice M_r avec $r = \text{rang}(A)$.

3) Réciproquement, si A est semblable à M_r , calculer A^2 .

4) Conclure.

Sujet 3 - Bancq Alexia

Exercice : Dérivée n-ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit Q un polynôme à coefficients réels de degré $d \leq n$. On définit l'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] &\rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\mapsto (PQ)^{(n)} \end{aligned}$$

où $(PQ)^{(n)}$ désigne la dérivée n-ième du produit de P par Q .

- 1) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 2) Déterminer $\text{Ker}(\varphi)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur Q pour que φ soit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
- 3) a) Montrer que la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est triangulaire supérieure.
b) Que dire si on suppose de plus $d < n$? Déterminer dans ce cas les valeurs propres de φ .

Sujet 4 - Waldmann Héloïse

Question courte

En dimension finie, combien de valeurs propres un endomorphisme peut-il avoir au maximum ?

Exercice : Inverse d'une matrice

- 1) Soit A une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note I_n la matrice identité.
 - a) Montrer que la famille $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2})$ est liée.
 - b) En déduire que l'inverse de A est un polynôme en A , c'est à dire qu'il existe un polynôme P_A tel que $A^{-1} = P_A(A)$.
- 2) Dans la question précédente, on a donc montré que pour toute matrice inversible, A^{-1} s'écrit sous la forme d'un polynôme en A , mais ce polynôme dépend a priori de la matrice A . Dans cette question, on suppose maintenant qu'il existe un polynôme P tel que pour toute matrice A inversible $A^{-1} = P(A)$. On pose Q le polynôme : $Q(X) = XP(X) - 1$.
 - a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a $Q(\lambda) = 0$.
Indication : On pourra s'intéresser à la matrice λI_n
 - b) Conclusion ?

Sujet 5 - Jaramillo Nicole

Exercice : $f^3 + f = 0$

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ **non nul** tel que $f^3 + f = 0$.

On admet que f possède au moins une valeur propre réelle.

- 1) Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f^2 + id)$.
- 2) a) Montrer que $\dim(\text{Ker}(f^2 + id)) \geq 1$.
b) Soit x un vecteur non nul de $\text{Ker}(f^2 + id)$. Montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + id)$.
- 3) Soit λ une valeur propre de f . Justifier que $\lambda^3 + \lambda = 0$. En déduire les valeurs propres de f et la dimension des sous-espaces propres associés.
- 4) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle f admet pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$