Colles Semaine 8 – 25 Novembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Barbier Sarah

Problème : Simulation de loi normale

L'objectif de cet exercice est de montrer les principales techniques pour générer des nombres selon des lois fixées. La génération de nombres aléatoires est un problème majeur en modélisation, que ce soit en physique, économie, informatique... L'idée générale est de construire ces générateurs à partir d'un générateur de base que l'on appelle `Rand`, qui génère des nombres aléatoires suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Par exemple, le programme "$X \leftarrow 5$ `Rand`" génère des nombres qui suivent la loi uniforme sur $[0, 5]$.

1) Quelques exemples simples (pour se familiariser) :

a) Proposer un moyen de simuler une loi uniforme sur $[a, b]$ à partir de `Rand`.

b) Proposer un moyen de simuler le résultat d'un dé à 6 faces (non biaisé) à partir de `Rand`.

2) On souhaite maintenant simuler la loi de Cauchy (toujours à partir de `Rand`), dont on rappelle la densité $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

a) Vérifier que cette fonction définit bien une densité de probabilité.

b) Déterminer la fonction de distribution F de cette loi. Montrer que la fonction réciproque F^{-1} de F est bien définie et la calculer.

c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer alors que la variable aléatoire $F^{-1}(U)$ admet pour fonction de répartition F. Cette méthode s'appelle l'*échantillonage par inversion*. En déduire un programme pour générer des nombres aléatoires qui suivent la loi de Cauchy.

d) Pourquoi ne peut-on pas utiliser cette méthode pour simuler une loi normale ?

3) Simuler une loi normale est donc un peu plus compliqué. Pour cela, on va utiliser le théorème suivant (admis) :

Soient f et g deux densités de probabilité sur $\mathbb{R}$, et soit c un réel tel que pour tout x, $f(x) \leq cg(x)$. Soit X une variable aléatoire de densité g, et soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de X. Alors, la loi conditionnelle de X sachant "$cUg(X) < f(X)$" a pour densité f.

a) Rappeler la densité de la loi normale.

b) Montrer qu'en posant $c = \sqrt{2\pi}$, on rentre dans les conditions du théorème pour simuler la loi normale.

c) En déduire un programme pour générer des nombres aléatoires suivant la loi normale.

Sujet 2 - Battesti Mazarine

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de l'endormorphisme de $\mathbb{R}[X]$: $\varphi(P) = XP'(X)$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{a\ln(t)}{t^3} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

1) Déterminer le réel a tel que f soit une densité de probabilité.

2) Soit X une variable aléatoire admettant la densité précédente. X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Sujet 3 - Baudras Mariette

Question courte

Existe-t-il des applications linéaires injectives de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$? Et des applications linéaires surjectives de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$? Généraliser.

Exercice

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(1-x)^{1/3} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Montrer que f est la densité d'une variable aléatoire X.
2) Calculer la fonction de répartition de X, notée F. Tracer sa courbe représentative.
3) Calculer l'espérance de X.

Sujet 4 - Dufour Dimitri

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}[X]$: $\varphi(P) = P'$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $Y = \sin(\pi X)$. On admet que Y est une variable aléatoire.

1) Etudier la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$ sur $[0, 1]$.
2) Soit F la fonction de répartition de Y.
a) Calculer $F(x)$ si $x \leq 0$ ou $x \geq 1$.
b) Montrer que pout tout $x \in [0, 1]$, $\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}((0 \leq X \leq \theta) \cup (1 - \theta \leq X \leq 1))$ où θ est l'unique réel de $[0, \frac{1}{2}]$ tel que $\sin(\pi\theta) = x$. En déduire $F(x)$.
c) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer la densité de Y.

Sujet 5 - Girier-Dufournier Jehan

Question courte

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité. Quel est le lien avec le théorème de transfert ?

Exercice : Trace et commutateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle trace de A la somme des termes de la diagonale principale :

$$\text{Tr}(A) = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$$

1) Montrer que l'application Tr : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ est linéaire.
2) Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.
3) Montrer que l'on ne peut pas trouver deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

Sujet 6 - Gounot Thomas

Exercice

Soit U une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ suivant une loi uniforme sur $]0,1]$. On pose $X = -\ln\left(\frac{2U}{1+U}\right)$.

1) Montrer que X est une variable aléatoire à densité et déterminer la densité de X.

2) On pose Z la fonction définie sur Ω par :

$$Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } U(\omega) > \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } U(\omega) \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Calculer $\mathbb{P}(Z = 0)$.

b) Montrer que $\forall x \in]0, \ln(\frac{3}{2})[, \mathbb{P}(Z \leq x) = \mathbb{P}(U \leq \frac{1}{2}) + \mathbb{P}(U > \frac{1}{2} \text{ et } X \leq x)$.

c) Que vaut $\mathbb{P}(Z \leq x)$ si $x \geq \ln(\frac{3}{2})$?

d) En déduire la fonction de répartition de Z et tracer sa courbe représentative.

e) Z est-elle une variable aléatoire à densité ?