

Colles Semaine 9 – 2 Décembre

Une attention particulière sera accordée à l'explication du raisonnement de l'étudiant ainsi qu'à sa maîtrise du cours. L'objectif n'est pas de recopier une solution toute rédigée.

Sujet 1 - Vago David

Exercice 1

On définit $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\langle P, Q \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} P(x) Q(x) dx$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- 1) Justifier que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
- 2) Rappeler la définition d'une ligne de niveau. Représenter quelques lignes de niveau de f .

Sujet 2 - Vallette d'Osia Louise

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{1}{1-y^2} \ln \left(\frac{x+y}{1+xy} \right)$.

1) a) Déterminer des conditions sur (x, y) pour que $f(x, y)$ soit défini. On note alors $\mathcal{D}$ l'ensemble de définition de f .

b) Représenter le domaine $\mathcal{D}$ sur un dessin.

2) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et tout $y \in]0, 1[$, $\left| \ln \left(\frac{x+y}{1+xy} \right) \right| \leq |\ln(y)|$

Indication : On pourra fixer y , puis ensuite étudier une fonction de x .

3) En déduire pour tout $x \geq 0$ la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(x, y) dy$

Sujet 3 - Kane Yaye

Question courte

Fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = \begin{cases} t^2 \sin(\frac{1}{t}) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

- 1) Montrer que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 - 2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
-

Sujet 4 - Beauvoir Esther

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.
 - 2) On étudie maintenant la continuité en $(0, 0)$.
 - a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0)$, puis calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x)$.
 - b) f est-elle continue en $(0, 0)$?
 - 3) Calculer les dérivées partielles de f .
-

Sujet 5 - Bonnin Clémence

Exercice

Soit U l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que $x > 0$ et $y > 0$. On définit une fonction f sur U par :

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

- 1) Montrer que f est de la classe C^1 sur U .
- 2) Calculer le gradient de f en tout point de U .
- 3) a) Montrer que (x, y) est un point critique si et seulement si x et y sont solution du système :

$$\begin{cases} 3(x + y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \\ x - y = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

- b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = t - \frac{1}{t^2}$. Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
 - c) En déduire que f admet un unique point critique dans U et déterminer ses coordonnées.
-

Sujet 6 - Delille Apolline

Question courte

Etudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$$

Exercice

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^4}{x^6 + y^6} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

- 2) Montrer que pour tout couple de réels $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f(x, y)| \leq |xy|$.
 - 3) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
 - 4) Calculer les dérivées partielles de f .
-