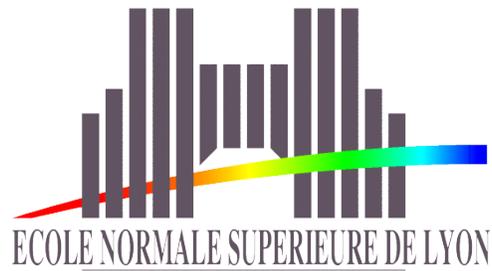


ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON



Jeudi 28 Août 2014

Rapport de stage

Fonction d'épaisseur pour l'analyse géométrique de formes

William Aufort



Introduction

Estimer localement l'épaisseur d'objets 3D est une étape cruciale dans toute application utilisant l'analyse de formes. Par exemple, l'extraction du squelette ou le partitionnement d'une forme [1] sont des fondamentaux en infographie et en modélisation 3D. Mais la définition d'épaisseur est déjà un problème en soi. Comment définir l'épaisseur locale d'une forme en un point de cette forme? C'est de là que sont issues différentes définitions de l'épaisseur. En particulier, deux de ces approches se distinguent par la représentation des objets à étudier : la première [2] utilise des objets en tant que volumes (ensembles de voxels discrets), la seconde [1] en tant que surfaces (des maillages). Ces deux approches essaient d'approximer une sorte de distance à l'axe médian de l'objet.

L'objectif de mon stage, tel que défini dans le sujet détaillé, était d'analyser et de comparer les différentes techniques permettant de calculer l'épaisseur d'un objet. Avec mon tuteur de stage, nous nous sommes plus précisément intéressés à la pertinence de ces définitions sur des objets de diverses complexités, ainsi qu'à la résistance (et plus généralement le comportement) de ces algorithmes face à des objets bruités.

Ce stage s'est déroulé au LIRIS (Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Système d'information) à Lyon, sous la direction de David Coeurjolly, directeur de recherche-CNRS, responsable de l'équipe de recherche m2DisCo à laquelle j'étais rattaché, sur une durée de six semaines.

Ce rapport expose le travail que nous avons produit durant ces six semaines. Dans un premier temps, je présente des définitions assez générales pour introduire les notions d'épaisseur. Dans un deuxième temps, j'expose nos deux principaux travaux : la véracité des algorithmes et la comparaison de leur résistance au bruit. Ensuite je montre plus précisément mon apport au sein de ce travail ainsi que l'algorithmique utilisée. Enfin, je détaille quelques questions intéressantes dans la poursuite de notre travail.

Table des matières

1 Définitions	3
1.1 Epaisseur volumique	3
1.2 Epaisseur surfacique : SDF	4
1.3 Divers	4
1.3.1 Formats de fichier	4
1.3.2 Objets étudiés	5
2 Comparaison des deux méthodes	5
2.1 Etude des profils d'épaisseur	5
2.1.1 Définition	5
2.1.2 Résultats	6
2.2 Histogramme des épaisseurs	7
2.2.1 Définitions	7
2.2.2 Résultats	7
3 Résistance au bruit des deux algorithmes	8
3.1 Modèles de bruits	8
3.1.1 Définitions	8
3.1.2 Choix effectués et commentaires	9
3.2 Mesures de résistance au bruit	10
3.2.1 Erreur locale et globale (surfacique)	10
3.2.2 Erreur locale et globale (volumique)	10
3.2.3 Earth Mover Distance	11
3.3 Résultats	11
3.3.1 Comparaison des différents bruits	11
3.3.2 Résistance : erreurs locale et globale	12
3.3.3 Résistance : Earth Mover Distance	12
4 Travail fourni et algorithmique	12
4.1 Déroulement du stage	13
4.2 Travail d'implémentation	14
4.2.1 Codes fournis	14
4.2.2 Travail fourni d'implémentation	14
4.3 Algorithmique utilisée	14
4.3.1 <code>iso-oriented Boxes</code>	14
4.3.2 Représentation des surfaces maillées	14
5 Travaux en suspend	14
5.1 Echantillonnage par Monte-Carlo et quantité de calcul	15
5.2 Représentation de la voxélisation par un bruit	15
5.3 Segmentation	15
6 Conclusion	16
A Contexte institutionnel et social du stage	18
B Sous-évaluation de l'épaisseur locale de la sphère par l'algorithme SDF	19
C Palier des profils d'épaisseur volumique	20

1 Définitions

Le fil conducteur de notre travail a été la comparaison de différents algorithmes de calcul d'épaisseur. Je vais donc introduire dans cette partie les algorithmes et définitions permettant de les comprendre.

1.1 Epaisseur volumique

Définition 1.1 (Image binaire) Soit $n \in \mathbb{N}$. Une image binaire X en dimension d est définie par une application de $[0, \dots, n-1]^d \subset \mathbb{Z}^d$ dans $\{0, 1\}$.

Les points (ou voxels) associés à la valeur 1 correspondent aux points de l'objet.

On formalise ici le fait qu'un objet discret est la donnée des voxels lui appartenant. Un exemple d'image binaire est l'objet de la figure 1.

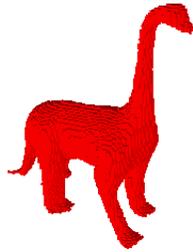


FIGURE 1 – Une image binaire en trois dimensions

Dans la suite, on parlera plus généralement d'objet pour désigner une image binaire.

Définition 1.2 (Boule ouverte) On appelle boule ouverte de centre c de rayon r l'ensemble de points suivants :

$$B(c, r) = \{x \in \mathbb{Z}^d / \|x - c\| < r\}$$

Dans la suite, on parlera simplement de boule pour désigner une boule ouverte.

Si \mathcal{B} est une boule, on notera $R(\mathcal{B})$ son rayon.

Définition 1.3 (Boule maximale) Soit $X \subset \mathbb{Z}^d$ une image binaire. Une boule $\mathcal{B} \subset X$ est dite maximale dans X si et seulement s'il n'existe pas de boule $\mathcal{B}' \subset X$ telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.

Nous pouvons alors définir l'axe médian discret d'un objet :

Définition 1.4 (Axe Médian Discret) Soit $X \subset \mathbb{Z}^d$ une image binaire. On appelle axe médian discret de X , que l'on note $MA(X)$ l'ensemble des boules maximales incluses dans X .

On identifie alors l'ensemble X et l'union des boules maximales. Ce sont elles qui vont refléter l'épaisseur de l'objet en un de ses points.

Définition 1.5 (Epaisseur Volumique [2]) Soit $X \subset \mathbb{Z}^d$ une image binaire. L'épaisseur (volumique) de X est l'application $\rho_X : X \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\rho_X(x) = \max\{r / \exists B(c, r) \in MA(X) / x \in B(c, r)\}$$

Autrement dit, l'épaisseur d'un point P de X est le rayon de la plus grosse boule incluse dans X qui contient P .

Dans la suite du rapport, on se placera dans le cas tri-dimensionnel ($d = 3$). S'il n'y a aucune ambiguïté sur l'objet, on notera simplement ρ et non ρ_X l'épaisseur de l'objet.

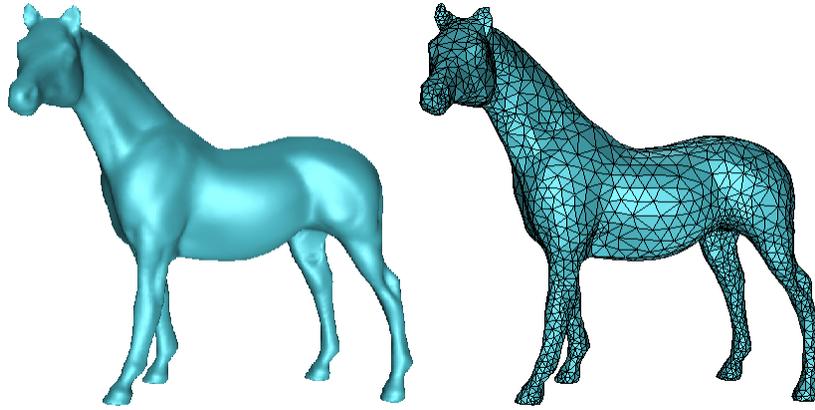


FIGURE 2 – Une surface et une triangulation de cette surface

1.2 Epaisseur surfacique : SDF

Définition 1.6 (Surface) Une surface est une variété réelle de dimension 2.

Définition 1.7 (Surface maillée) Une surface maillée est la triangulation d'une surface. Autrement dit, il s'agit d'une découpe de cette surface en une collection de triangles dont l'union a la même topologie que la surface initiale.

La figure 2 illustre cette notion de surface maillée.

Epaisseur surfacique : *Shape Diameter Function*

La *Shape Diameter Function* (noté SDF dans la suite du rapport) est une fonction définie par un algorithme décrit dans [1]. Cette fonction, comme son nom l'indique, essaye d'approcher la demi-longueur d'un diamètre, plus précisément la demi-longueur du rayon orthogonal à la surface en un point.

L'épaisseur définie comme la demi-longueur du rayon orthogonal à la surface a déjà été étudiée dans la littérature et s'est révélée peu robuste. L'algorithme de calcul de la SDF est différent : on lance des rayons aléatoirement dans un cône à l'intérieur de la surface (figure 3), et on utilise les longueurs de ces rayons pour fournir une estimation de l'épaisseur locale, en effectuant une moyenne pondérée. Plus précisément, la pondération d'un rayon correspond à l'inverse de l'angle entre ce rayon et la direction du cône.

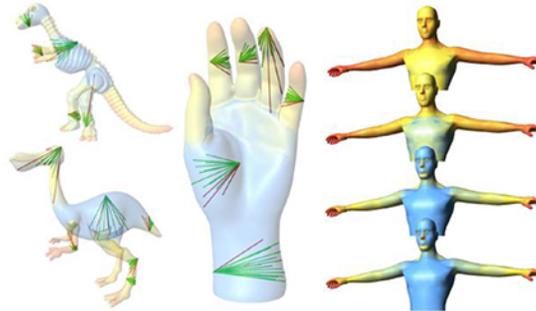


FIGURE 3 – Une illustration du lancer de rayons dans un cône (extraite de [1]). Les longueurs des différents rayons servent à évaluer l'épaisseur surfacique au niveau du point.

1.3 Divers

1.3.1 Formats de fichier

Nous travaillons dans ce projet avec des maillages et des objets discrets, et donc avec deux formats différents : le format OFF pour les maillages et le format VOL pour les objets discrets. Nous avons utilisé des outils de voxelisation en ligne de commande pour transformer nos objets maillés en objets discrets afin de comparer les algorithmes.

1.3.2 Objets étudiés

Dans ce stage nous avons étudié des objets disponibles dans des bases de données d'objets 3D, notamment [5] et [6]. En particulier nous nous sommes intéressés à trois objets : une sphère (Sphere), un noeud (Knot), et Armadillo, un objet articulé (voir figure 4).



FIGURE 4 – Les objets Knot (a), Armadillo (b)

2 Comparaison des deux méthodes

Dans un premier temps nous avons comparé les deux méthodes d'un point de vue des valeurs renvoyées. J'introduis dans cette section quelques définitions concernant nos outils pour effectuer ces comparaisons, puis je présenterai nos résultats.

2.1 Etude des profils d'épaisseur

2.1.1 Définition

Définition 2.1 (Boîte englobante) Soit X un objet. On appelle boîte englobante de X le plus petit cube dont les arêtes sont orientées selon les trois axes, qui contient X . La taille de la boîte englobante, notée $\mu(X)$ est le côté de la boîte englobante. Elle est exprimée avec une distance classique dans le cas continu, en nombre de voxels dans le cas discret.

Cette dernière quantité est utilisée essentiellement pour normaliser les valeurs d'épaisseur renvoyées par les algorithmes, notamment pour pouvoir comparer les deux méthodes introduites précédemment, par exemple avec les profils d'épaisseur.

Définition 2.2 (Profil d'épaisseur) Soit X un objet, ρ une fonction d'épaisseur (volumique ou surfacique). Le profil d'épaisseur de X avec l'épaisseur ρ , noté π_ρ est l'application définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\pi_\rho(x) = \frac{\text{Vol}(\{x/\rho(x) \leq x\})}{\mu(X)}$$

où Vol représente le volume de l'ensemble considéré (le cardinal dans le cas discret, le volume au sens classique dans le cas continu), et $\mu(X)$ la taille de la boîte englobante de X définie précédemment.

Ce facteur $\mu(X)$, comme annoncé précédemment, sert à normaliser les valeurs obtenues avec les deux méthodes, afin de pouvoir obtenir des données comparables.

Dans la suite on identifiera l'application π_ρ et le graphe de l'application $x \mapsto \pi_\rho(\frac{x \cdot R_{max}}{100})$ sur l'intervalle $[0; 100]$, où R_{max} est l'épaisseur maximale sur l'objet, que l'on appellera également profil d'épaisseur. L'unité sur l'axe des abscisses correspondra alors un pourcentage de faces (cas de SDF) ou de voxels (cas discret), et sur les ordonnées nous pourrions observer l'épaisseur normalisée par la taille de l'objet. La figure 5 représente un exemple de profil d'épaisseur.

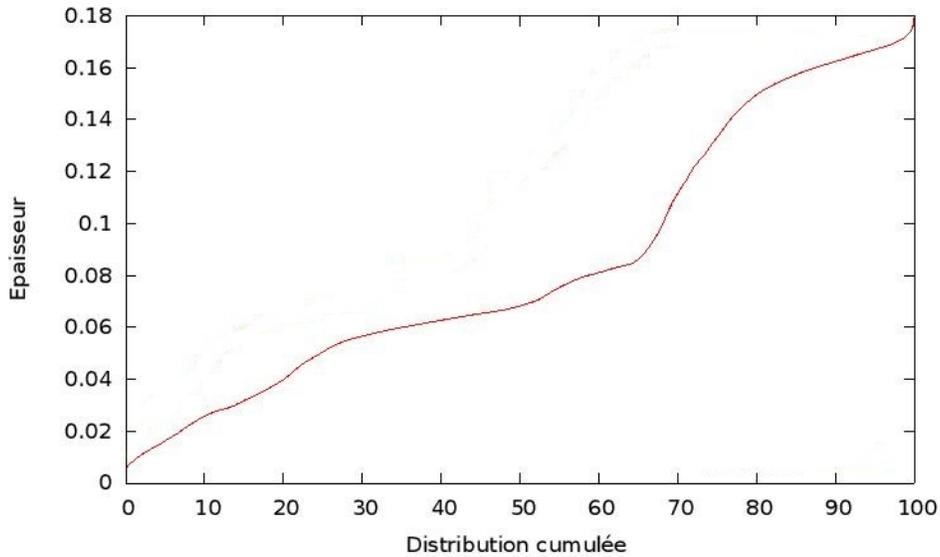


FIGURE 5 – Un exemple de profil d'épaisseur

2.1.2 Résultats

Une des premières questions que nous nous sommes posées portait sur la concordance des valeurs. Les valeurs renvoyées par les deux algorithmes sont-elles voisines, identiques, ou complètement différentes? Nous avons donc commencé par comparer les profils d'épaisseur associés aux deux fonctions d'épaisseurs, sur les objets présentés dans la section 1.3.2.

Dans un second temps, nous voulions observer le comportement des profils d'épaisseur avec une résolution de l'objet voxelisé variable. Pour ce faire, nous avons tracé plusieurs profils d'épaisseur d'un même objet avec différentes résolutions. Le schéma de la figure 6 illustre plus graphiquement notre démarche.

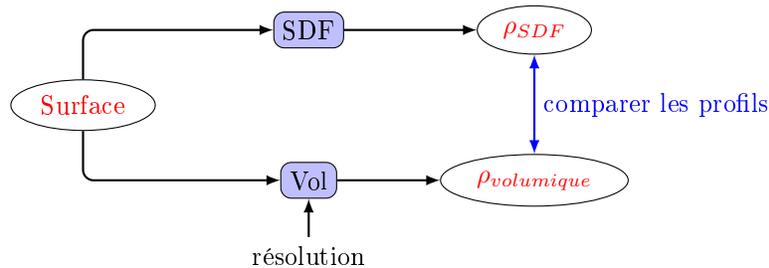


FIGURE 6 – Illustration de l'expérience (Vol désigne ici le calcul de l'épaisseur volumique de l'objet discrétisé)

Pour les deux objets *knot* et *Armadillo*, on observe les mêmes résultats (voir figure 7) :

1. Les profils d'épaisseur volumique et surfacique sont complètement différents, aussi bien sur la forme globale du profil que sur les valeurs d'épaisseurs en elle-même.
2. Dans le cas discret, quand la résolution augmente, la suite des profils d'épaisseur volumique semble converger.

Le premier résultat fut assez surprenant et nous poussa à regarder plus précisément la répartition des valeurs d'épaisseur, sous forme d'histogramme, nous y viendrons dans la prochaine section.

Une remarque plus générale concernant la forme des profils d'épaisseur : pour l'épaisseur volumique, on remarque la présence d'un palier final assez important sur les deux courbes. En effet, pour *Armadillo*, une valeur couvre près de 30% des voxels. Ce résultat est un peu plus formalisé et démontré en annexe C.

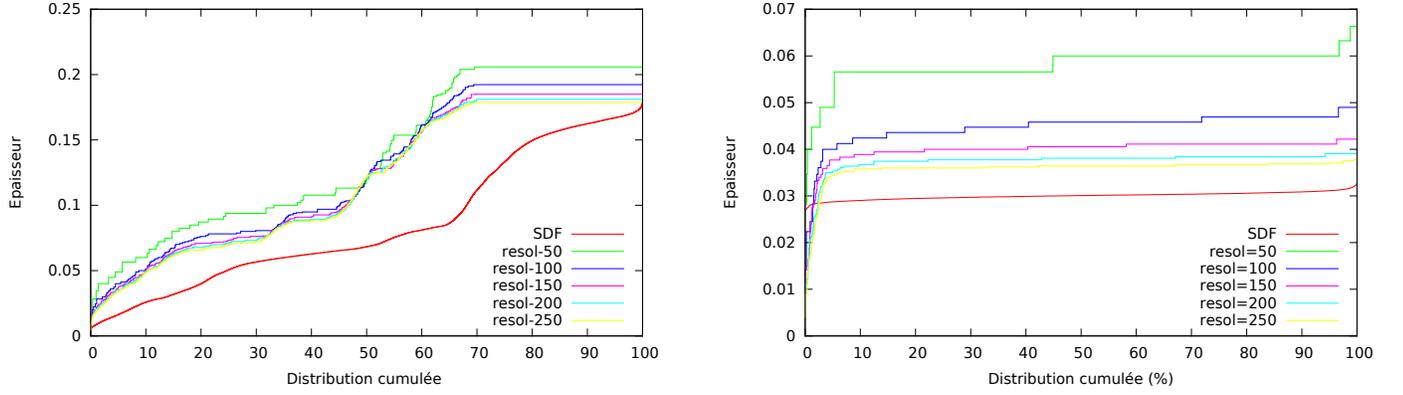


FIGURE 7 – Les profils d'épaisseur pour les objets **Armadillo** (a) et **Knot** (b). Pour chaque n , la courbe "resol- n " représente le profil d'épaisseur volumique de l'objet discrétisé avec une résolution égale à n .

2.2 Histogramme des épaisseurs

2.2.1 Définitions

Définition 2.3 (Histogramme des épaisseurs) Soit X un objet, ρ une fonction d'épaisseur. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'histogramme de ρ avec la précision n est l'application, de $\{0, \dots, n-1\}$ dans \mathbb{N} qui à l'entier k associe

$$\text{Card}\{x \in X / \frac{k \cdot R_{max}}{n} \leq \rho(x) < \frac{(k+1) \cdot R_{max}}{n}\}$$

Ici on cherche à représenter la répartition des rayons, on donne plus d'importance aux valeurs. Comme celles-ci sont très diverses (surtout dans le cas surfacique), on regroupe toutes les valeurs dans des intervalles de longueur $\frac{R_{max}}{n}$, d'où le nom de précision pour n .

2.2.2 Résultats

On peut avoir un aperçu plus précis des valeurs d'épaisseur avec les histogrammes. Nous voulions compléter avec plus de précision les observations précédentes, notamment par rapport à la comparaison des valeurs renvoyées.

Avec les objets **Sphere** et **Knot**, nous avons pu vérifier quel algorithme renvoie des valeurs les plus proches possible de ce qui est attendu : une épaisseur unique égale au rayon de la sphère (respectivement du noeud). En comparant les histogrammes des épaisseurs obtenues avec les deux algorithmes (voir figure 8), nous avons observé deux choses :

1. Concernant les valeurs : celles obtenues avec la méthode volumique sont très proches du rayon attendu, lors que SDF sous-estime cette valeur quelque soit la face considérée.
2. Concernant la répartition des valeurs : les valeurs renvoyées par SDF semblent suivre une loi gaussienne de paramètres la moyenne et la variance de ces données. Les valeurs renvoyées par la méthode volumique, quant à elles, sont essentiellement localisées sur la valeur maximale, quelques voxels prennent des valeurs plus faibles. De plus, pour la sphère, surface plus régulière, la taille de cette gamme de valeurs décroît quand on augmente la résolution.

Une explication rigoureuse de la sous-évaluation des épaisseurs par l'algorithme SDF (pour la sphère) est donnée en annexe B. Ce qui est important de constater ici est que la méthode volumique donne de meilleurs résultats sur l'épaisseur attendue pour les objets simples considérés, aussi bien du point de vue des valeurs prises que de leur répartition.

En ce qui concerne **Armadillo** (figure 9), on observe un phénomène similaire concernant la répartition. Dans l'histogramme des épaisseurs volumiques, quelques valeurs d'épaisseur ont une fréquence non négligeable, les autres valeurs sont presque toutes représentées mais en faible nombre. Tandis que pour SDF, il n'y a pas vraiment de valeur prédominante, ni de valeurs jamais prises (les fréquences de chaque valeur sont toujours entre 1 et 4%).

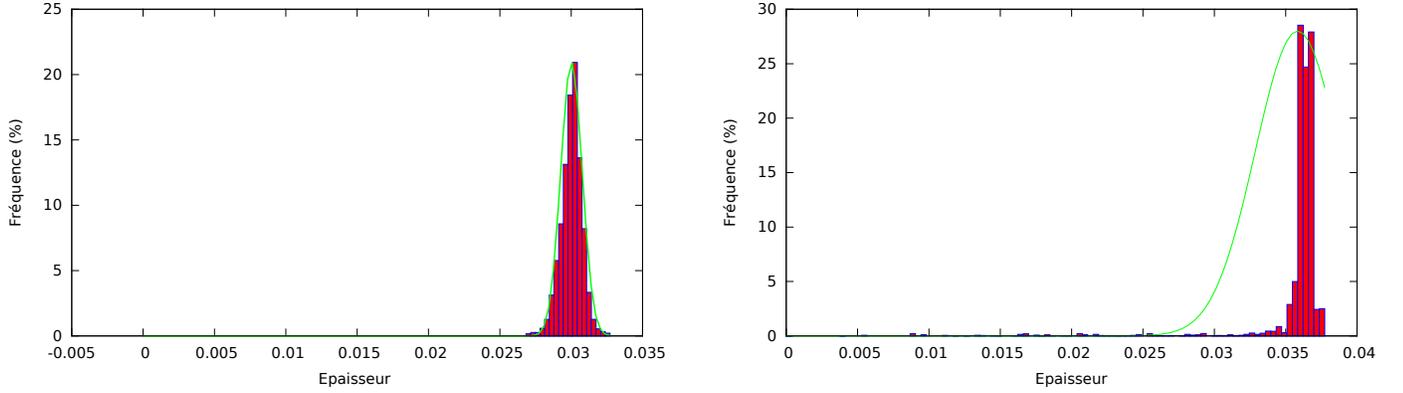


FIGURE 8 – Les histogrammes des épaisseurs (normalisées) de l’objet *Knot* obtenus avec SDF (a), et la méthode volumique (b) avec une résolution de 250. On observe bien la répartition gaussienne pour SDF et les faibles valeurs pour la méthode volumique.

*

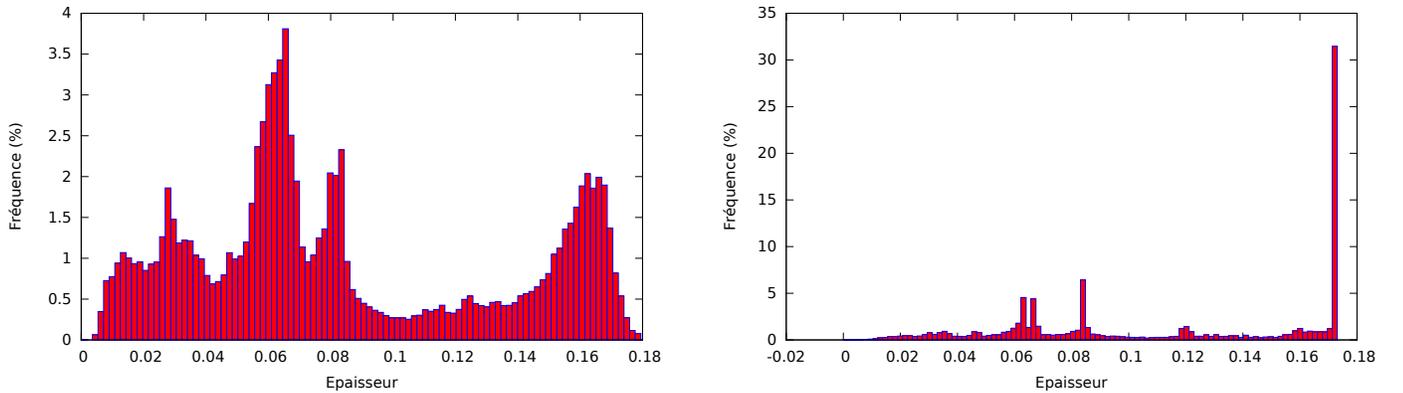


FIGURE 9 – Les histogrammes des épaisseurs (normalisées) de l’objet *Armadillo* obtenus avec SDF (a), et la méthode volumique (b) avec une résolution de 600.

3 Résistance au bruit des deux algorithmes

Une part majeure de notre travail réside dans l’étude de la résistance au bruit des fonctions d’épaisseur. J’introduis les définitions concernant les bruits et leur mesure, puis j’expose les résultats de notre étude comparative.

3.1 Modèles de bruits

3.1.1 Définitions

Tout d’abord une petite remarque : les bruits que nous avons étudiés agissent sur les sommets du maillage de l’objet. Certains modèles de bruits sont spécifiques aux objets volumiques discrets, comme celui utilisé dans [7] où on supprime aléatoirement des voxels en bordure de l’objet.

Définition 3.1 (Bruit cubique) Soit \mathcal{M} une surface maillée. Un maillage \mathcal{M}' est obtenu par ajout d’un bruit cubique de paramètre s s’il obtenu à partir de \mathcal{M} en ajoutant à chaque coordonnée de chaque sommet du maillage un bruit ϵ qui suit une loi normale d’espérance nulle et de variance $\frac{s \cdot \mu(\mathcal{M})}{100}$.

Le paramètre s s’exprime donc en pourcentage.

On retrouve ici encore le facteur $\mu(X)$. Ici il sert à utiliser les mêmes amplitudes s sur chaque surface, quelque soit sa taille.

Définition 3.2 (Bruit sphérique) Soit \mathcal{M} une surface maillée. Un maillage \mathcal{M}' est obtenu par ajout d’un bruit sphérique de paramètre s s’il obtenu à partir de \mathcal{M} en ajoutant à chaque coordonnée i de chaque sommet de maillage un bruit ϵ_i qui suit une loi normale d’espérance nulle et de variance $\frac{s \cdot \mu(\mathcal{M})}{100}$ avec en plus $\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 \leq (s \cdot \mu(\mathcal{M}))^2$.

La différence avec le bruit cubique est qu'ici on filtre les déplacements de norme supérieure à $s \cdot \mu(\mathcal{M})$.
 Avant d'introduire le dernier bruit, définissons la normale en un point à une surface :

Définition 3.3 (Normale en un point à une surface) Soit \mathcal{M} une surface maillée, P un point de \mathcal{M} . Soit \mathcal{F} l'ensemble des faces de \mathcal{M} contenant P . La normale en P à \mathcal{M} est le vecteur obtenu après normalisation du vecteur $\sum_{F \in \mathcal{F}} \vec{n}_F$, où \vec{n}_F désigne le vecteur normal unitaire sortant de la face F .

Définition 3.4 (Bruit selon la normale) Soit \mathcal{M} une surface maillée. Un maillage \mathcal{M}' est obtenu par ajout d'un bruit selon la normale de paramètre s s'il obtenu à partir de \mathcal{M} en ajoutant à chaque sommet du maillage un vecteur de bruit \vec{c} tel que $\vec{c} = \lambda \cdot \vec{n}$ où :

- \vec{n} est le vecteur normal au point considéré ;
- λ est une variable aléatoire qui suit une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{s \cdot \mu(\mathcal{M})}{100}$.

Autrement dit, on déplace chaque point de la surface selon la normale à cette surface.

La figure 10 illustre graphiquement les définitions des deux derniers bruits.

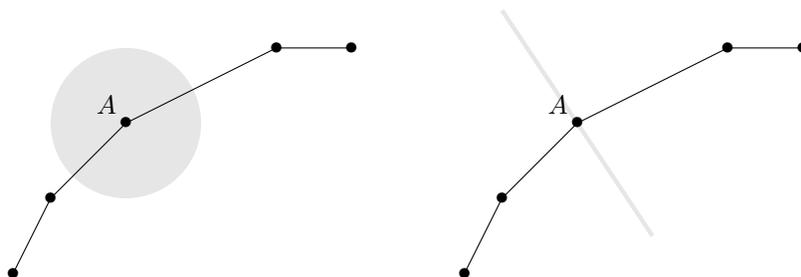


FIGURE 10 – Les zones grisées indiquent les déplacements possibles du point. Le déplacement est choisi dans une sphère dans le cas du bruit sphérique (a), dans la direction de la normale à la surface dans le cas du bruit selon la normale (b). (représenté en 2D ici)

3.1.2 Choix effectués et commentaires

Définition des bruits :

Dans chacun des bruits définis nous avons choisi de représenter les déplacements aléatoires par des variables suivant des lois gaussiennes, et non uniformes, tout simplement parce que cela nous semblait plus réaliste : il y a très peu de points dégénérés et beaucoup de points qui ont un déplacement faible.

Origine des bruits :

Le bruit cubique est sans doute le bruit le plus intuitif des trois bruits introduits ici, car il représente des perturbations quelconques mais plausibles.

L'idée première du bruit sphérique et de mettre de côté des déplacements excessifs de points. Nous l'avons peu étudié car un peu trop restrictif.

Le bruit selon la normale est un modèle de bruit utilisé dans [8] (avec cependant une amplitude de déplacement suivant une loi uniforme), sans que l'article n'explique précisément pourquoi. Nous avons choisi de modéliser ce bruit pour deux raisons. Tout d'abord, les résultats obtenus peuvent être comparés à ceux observés dans cet article. Mais aussi nous voulions trouver pourquoi ce bruit avait été choisi. Deux hypothèses ont été émises :

- ce bruit perturberait beaucoup moins les valeurs renvoyées par SDF ;
- cette méthode produirait un objet maillé "correct" (sans créer de faces qui s'intersectent par exemple).

Gamme de bruits choisie :

Nous pouvons utiliser la même gamme de bruits pour les trois bruits et aussi pour tous les objets étudiés (grâce au facteur de normalisation). Nous avons choisi de prendre des amplitudes de bruits entre 0.01% et 1% voire 2%, car en dessous de 0.01% le bruit est peu visible, et au delà de 1% (et même de 0.5% pour Armadillo) les surfaces deviennent méconnaissables.

Exemple

La figure 11 représente une surface bruitée avec deux amplitudes différentes. On peut ainsi avoir un aperçu de la déformation causée avec ces amplitudes.

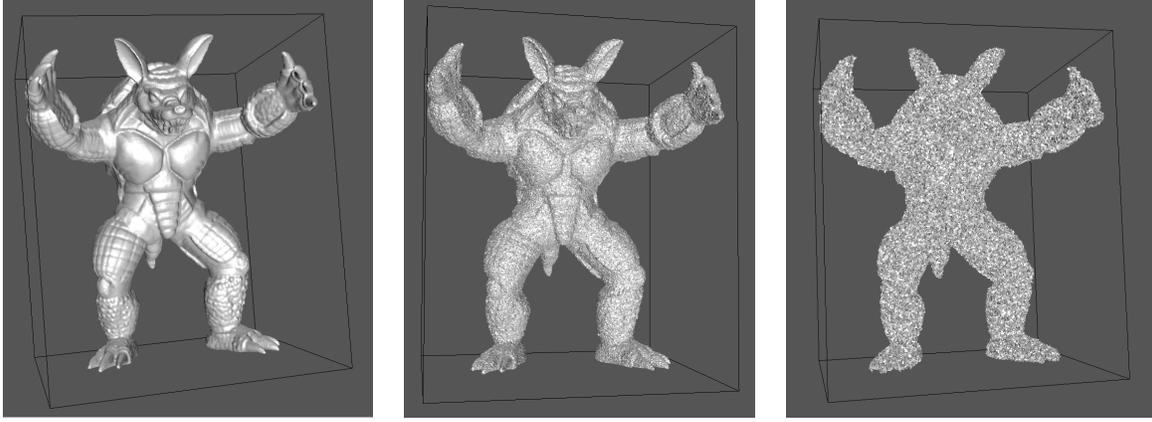


FIGURE 11 – L’objet Armadillo (a), bruité avec un bruit cubique d’amplitude 0.05% (b) et 0.2% (c).

3.2 Mesures de résistance au bruit

Nous avons étudié deux mesures de résistance au bruit : l’erreur locale et l’Earth Mover Distance.

3.2.1 Erreur locale et globale (surfactive)

Nous avons repris les définitions d’erreurs locale et globale introduites dans [8].

Soit \mathcal{M} une surface maillée, \mathcal{M}' une surface obtenue grâce à l’un des trois bruits introduits précédemment. On a une bijection claire entre les sommets de \mathcal{M} et ceux de \mathcal{M}' , qui consiste à associer à chaque point de \mathcal{M} le point bruité. On a donc une bijection tout aussi évidente entre les faces des deux maillages. Nous pouvons alors comparer directement les valeurs renvoyées par SDF au niveau de chaque face entre les deux maillages : c’est l’erreur locale.

Définition 3.5 (Erreur locale (surfactive)) Soit F une face de \mathcal{M} . Soit F' la face de \mathcal{M}' en bijection "naturelle" avec F . Soit ρ la fonction d’épaisseur surfactive. L’erreur locale en F notée $R_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}(F)$ est définie par :

$$R_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}(F) = \frac{|\rho(F') - \rho(F)|}{\rho(F)}$$

Définition 3.6 (Erreur globale (surfactive)) L’erreur globale entre une surface maillée \mathcal{M} et une surface maillée bruitée \mathcal{M}' , notée $R(\mathcal{M},\mathcal{M}')$, est définie par :

$$R(\mathcal{M},\mathcal{M}') = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{F \in \mathcal{M}} R_{\mathcal{M},\mathcal{M}'}(F)$$

L’erreur globale nous donne une mesure de l’erreur moyenne commise, mais l’erreur locale est également intéressante : on peut observer la répartition de ces erreurs, voir les valeurs maximales et minimales, etc...

3.2.2 Erreur locale et globale (volumique)

L’idée reste la même pour l’épaisseur volumique : on cherche à comparer les valeurs voxel par voxel, sauf qu’ici on n’a plus forcément de bijection après application d’un bruit.

Nous avons choisi d’adapter la définition en ne considérant que les voxels appartenants aux deux objets.

Définition 3.7 (Erreur locale (volumique)) Soient X et X' deux objets discrets, et soit v un voxel de $X \cap X'$. L’erreur locale en v , également notée $R_{X,X'}(v)$, est définie par :

$$R_{X,X'}(v) = \frac{|\rho_X(v) - \rho_{X'}(v)|}{\rho_X(v)}$$

Définition 3.8 (Erreur globale (volumique)) Soient X et X' deux objets discrets tels que $X \cap X' \neq \emptyset$. L’erreur globale entre X et X' , notée $R(X, X')$ est définie par :

$$R(X, X') = \frac{1}{|X \cap X'|} \sum_{v \in X \cap X'} R_{X,X'}(v)$$

3.2.3 Earth Mover Distance

Contrairement aux erreurs locales et globales, l'Earth Mover Distance (plus connue sous le nom de distance de Wasserstein) est une mesure de distance entre deux mesures de probabilités sur un domaine \mathcal{D} . Si les deux distributions sont vues comme des tas de sables sur le domaine, alors l'Earth Mover Distance correspond au coup minimal pour transformer la première distribution en la seconde par déplacement des tas de sable. Ce problème, dit de transport optimal, a valu aussi à cette distance le nom de "distance du terrassier".

Dans notre cas, nous allons mesurer la distance entre deux histogrammes d'épaisseur.

Il existe une formule explicite qui donne l'Earth Mover Distance (notée EMD par la suite) entre deux histogrammes $(A_i)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$ et $(B_i)_{i \in \{0, \dots, n-1\}}$ (A_i et B_i représentent des fréquences). Remarquons la condition nécessaire et suffisante pour que l'EMD soit définie : $\sum A_i = \sum B_i$.

Lemme 1 (Calcul de l'Earth Mover Distance) *En posant $EMD_0 = 0$ et $EMD_{i+1} = A_i + EMD_i - B_i$, on a :*

$$EMD = \sum_{i=0}^n |EMD_i|$$

3.3 Résultats

Après avoir introduit les bruits étudiés et les outils permettant de faire les comparaisons, j'expose maintenant nos résultats sur la résistance au bruit.

3.3.1 Comparaison des différents bruits

Nous avons d'abord voulu comparer les différents bruits, essentiellement pour vérifier deux choses :

1. Le bruit sphérique, avec cette notion de filtrage, devrait induire une erreur plus faible sur les valeurs renvoyées par SDF que le bruit cubique;
2. L'intérêt éventuel de focaliser le bruit selon la normale, ce qui a été fait dans [8].

Pour ce faire, nous avons tracé le profil d'erreur locale (la même idée de répartition que pour les profils d'épaisseur). Comparer les erreurs occasionnées sur la surface revient à comparer la position de plusieurs de ces courbes.

Nous avons tracé les profils d'erreur locale pour les trois bruits, avec différentes amplitudes de bruits (figure 12). Nous observons à chaque fois que le bruit sphérique donne des erreurs moins importantes que le bruit cubique quelque soit l'amplitude du bruit choisi. Concernant le bruit selon la normale, il produit une erreur plus importante pour de faibles amplitudes, mais globalement l'erreur est plus faible.

On peut observer aussi que l'allure des courbes reste la même (un palier central avec quelques valeurs très faibles ou très importantes) entre les différents bruits et les différentes résolutions, mais que nous retrouvons la même forme que dans les résultats de [8].

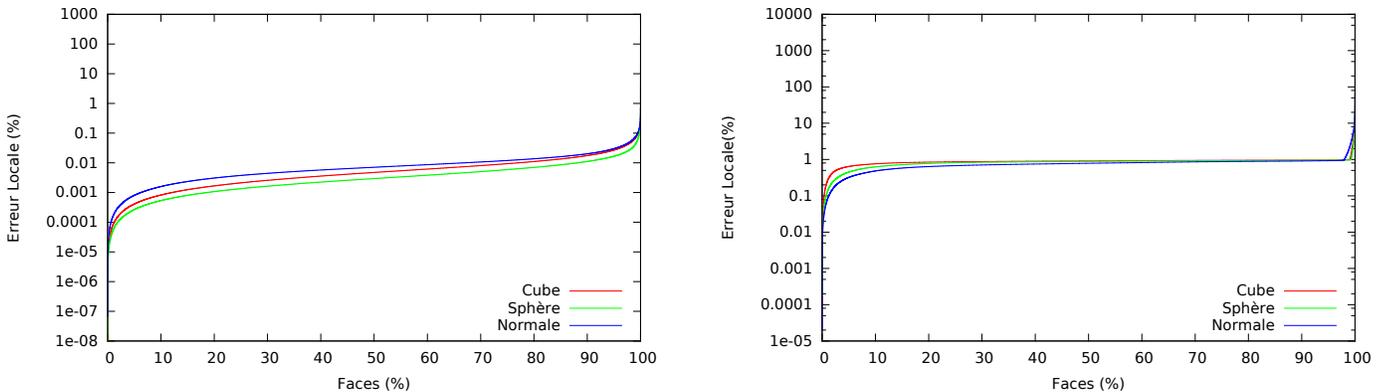


FIGURE 12 – Les profils d'erreurs locales obtenus en bruitant l'objet Armadillo, avec deux amplitudes de bruits différentes.

On peut remarquer également que l'erreur globale (la moyenne des erreurs locales) correspond approximativement au palier de la courbe, et que celle-ci augmente avec l'amplitude du bruit, ce qui semble tout à fait intuitif.

Mais nos résultats les plus intéressants concernent la comparaison de la résistance au bruit entre les deux algorithmes.

3.3.2 Résistance : erreurs locale et globale

Du point de vue de l'erreur locale, nous avons observé sur plusieurs exemples (différentes amplitudes de bruit et différents objets) que la méthode volumique fournit de bien meilleures performances en terme de résistance : celle-ci est plus faible pour une grande partie de l'objet considéré. La figure 13 illustre ce résultat sur un exemple précis.

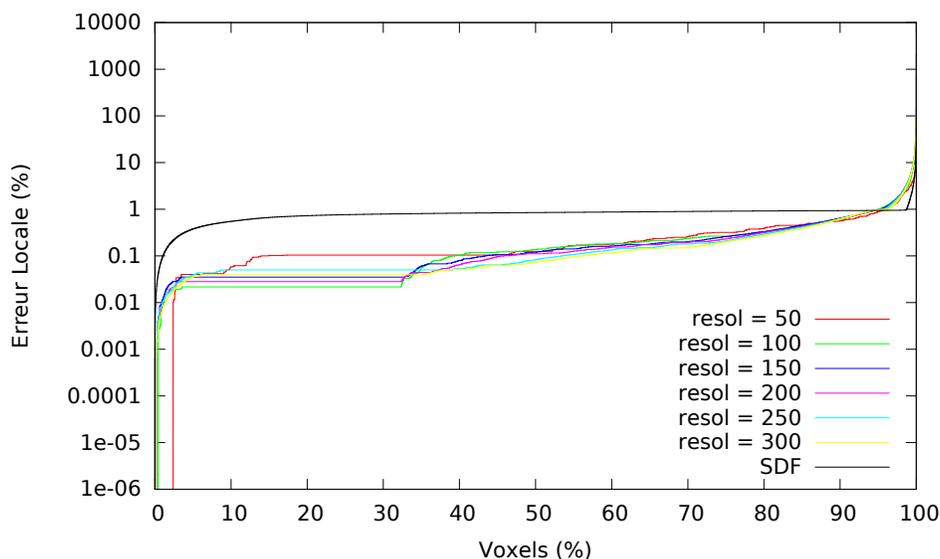


FIGURE 13 – Le profil de l'erreur locale induite sur les valeurs renvoyées par SDF et par la méthode volumique sur *Armadillo*, avec un bruit cubique d'amplitude 0.5%

La courbe en noir (l'erreur sur les valeurs renvoyées par SDF) dépasse largement les erreurs de la méthode volumique.

On peut remarquer également que la forme même des profils d'erreur est différente : pour la méthode surfacique, on observe un premier palier, les voxels qui le composent pourraient correspondre à ceux qui occasionnent le palier dans le profil d'épaisseur.

3.3.3 Résistance : Earth Mover Distance

Pour pouvoir comparer la résistance au bruit à l'aide de l'EMD, nous avons, pour différentes amplitudes de bruits, bruité une surface, puis calculé l'EMD entre les deux histogrammes d'épaisseur SDF (bruité et non bruité). Pour la méthode volumique, nous avons discrétisé ces mêmes surfaces avec la même résolution, puis nous avons calculé l'EMD entre les deux histogrammes d'épaisseur volumique (bruité et non bruité). La figure 14 représente cette expérience avec un organigramme.

Les résultats obtenus nous ont conforté : la résistance de l'épaisseur volumique est bien plus importante (voir figure 15).

Cependant ces comparaisons ont été réalisées avec une résolution précise, il pourrait être intéressant de prendre la résolution également en paramètre ici.

4 Travail fourni et algorithmique

J'expose dans cette section des détails sur le travail que j'ai fourni pendant ce stage, notamment les différentes étapes de mon stage ainsi que la partie implémentation. J'expose également des structures algorithmiques que j'ai dû utiliser et qui m'ont semblées intéressantes.

4.2 Travail d'implémentation

Une par importante de ce stage réside dans l'implémentation des outils et des tests. Ceux-ci ont été écrits essentiellement en langage C++, ce qui m'a permis de me remettre à niveau dans ce langage de programmation. J'ai également pu découvrir et utiliser CMake, la librairie CGAL [4] ainsi que plusieurs outils utiles en imagerie (Binvox [9] pour la voxelisation, Geomview [10] et QVox [11] pour la visualisation d'objets 3D).

4.2.1 Codes fournis

Une base de code était déjà à ma disposition pour éviter de perdre du temps à recoder des programmes qui ont déjà été codés. J'ai utilisé principalement :

- une implémentation de l'algorithme SDF disponible dans CGAL ;
- un exécutable pour calculer les boules de l'axe médian discret (utilisé pour le calcul de l'épaisseur volumique) [3].

4.2.2 Travail fourni d'implémentation

J'ai codé le calcul de l'épaisseur volumique en utilisant les boules de l'axe médian discret, celles-ci étant stockées dans une structure efficace disponible dans CGAL appelée `iso-oriented Boxes`. Cette structure sera détaillée dans la prochaine partie.

J'ai également implémenté plusieurs outils :

- pour créer des données utiles et pour tracer les profils d'épaisseur et les histogrammes à partir des valeurs d'épaisseur relevées ;
- pour bruiteur une surface. On peut choisir le type de bruit ainsi que l'amplitude ;
- pour les calculs statistiques : erreur globale et locale, ainsi que l'Earth Mover Distance.

Cette étape fut cependant la dernière phase d'implémentation durant mon stage. Au début, j'avais implémenté directement les tests qui nous intéressaient, il aurait été préférable de commencer par ces petits outils pour ensuite s'en servir.

4.3 Algorithmique utilisée

4.3.1 `iso-oriented Boxes`

J'ai utilisé cette structure hiérarchique de boîtes de la librairie CGAL pour stocker les boules de l'axe médian, nécessaires pour calculer l'épaisseur volumique en un point. L'algorithme naïf consiste à regarder pour chaque boule si celle-ci contient le point, et de mettre à jour éventuellement le rayon maximal. Cette structure fournit un algorithme efficace pour trouver des intersections d'objets. L'idée est de stocker des boîtes contenant des boules : les boules de l'axe médian et les boules de rayon nul représentant les points où l'on veut calculer l'épaisseur.

4.3.2 Représentation des surfaces maillées

La structure d'`halfedge` (voir figure 16) est la base de la représentation des surfaces maillées. Elle est capable de maintenir des informations sur des sommets, des arêtes et des faces. Une `halfedge` correspond à une arête associée à un sens de parcours. A partir de méthodes élémentaires (`halfedge` suivante, précédente et opposée, face incidente et sommet incident) ont été construites des méthodes utiles, comme parcourir une face ou un ensemble de faces incidentes en un point, ou encore parcourir tous les sommets de la surface maillée. Les deux premières méthodes utilisent une généralisation des itérateurs C++ : les `circulateurs`. J'ai utilisé ces méthodes notamment lors de la génération de bruit sur une surface, et j'ai trouvé cette structure très intéressante.

5 Travaux en suspend

J'évoque ici quelques questions que je n'ai pas eu le temps d'aborder durant ce stage, mais qui deviennent intéressantes à la vue de nos résultats.

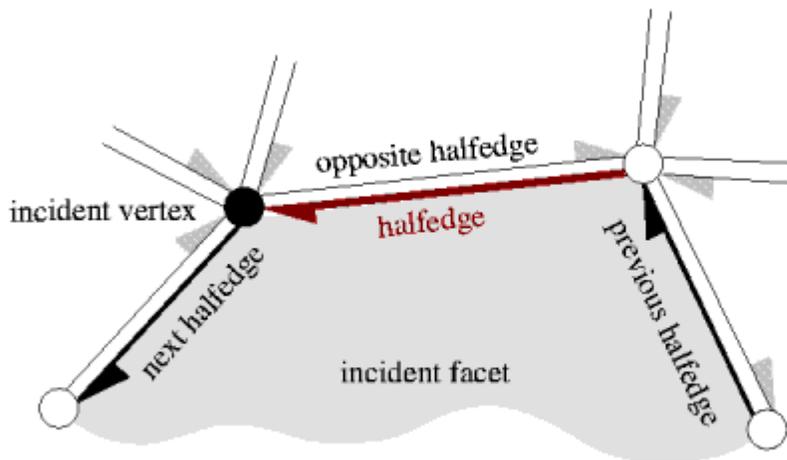


FIGURE 16 – Une illustration d’une halfedge, ainsi que des méthodes élémentaires sur les halfedges

5.1 Echantillonnage par Monte-Carlo et quantité de calcul

Pour déterminer le profil (ou l’histogramme) d’épaisseur volumique, nous utilisons les valeurs d’épaisseur en chaque voxel de l’objet. Cette évaluation est très coûteuse, et nous nous sommes demandé si nous pouvions restreindre le nombre de voxels à évaluer, tout en conservant un profil (respectivement un histogramme) très proche. Nous avons étudié brièvement deux approches :

- choisir les points à évaluer sur une grille avec un pas fixé (la discrétisation) ;
- mais surtout choisir ces points au hasard dans l’objet (méthode de Monte-Carlo).

Avec cette dernière méthode, nous avons fixé le nombre de points dans l’objet égal au nombre de sommets de la surface maillée. Ainsi, nous souhaitons observer si on obtenait des résultats concluants avec le même nombre de points où l’épaisseur surfacique était évaluée (et donc le même nombre de calculs élémentaires). Les résultats furent plutôt satisfaisants sur *Armadillo*.

Un travail intéressant pourrait être de déterminer un seuil à partir duquel un trop faible nombre d’échantillons induirait une trop grande erreur, par exemple en modélisant cet échantillonnage aléatoire par un bruit.

5.2 Représentation de la voxélisation par un bruit

Voxéliser un maillage revient à discretiser le volume à l’intérieur du maillage, et donc à créer du bruit (figure 17). Il peut être intéressant de modéliser ce phénomène par un bruit gaussien, comme ceux introduits dans notre travail. On pourrait chercher à voir quelle amplitude de bruit est nécessaire pour modéliser une voxélisation à une certaine résolution. Mais surtout, on pourrait par exemple pousser ces travaux afin de voir à partir de quand il est inutile d’augmenter la résolution en terme de performances. Beaucoup de choses restent encore à définir mais cela peut être intéressant à explorer.

J’avais commencé à aborder cette question vers la fin de mon stage : j’ai cherché à déterminer l’influence de la résolution de la voxélisation en exhibant de l’erreur globale comparée à une image à forte résolution une fonction de la résolution.

5.3 Segmentation

Une des applications des fonctions d’épaisseur est l’analyse géométrique et topologique de formes, et notamment la segmentation.[1] livre un algorithme de segmentation basé sur les valeurs renvoyées par SDF. Avec nos résultats, il pourrait être maintenant intéressant de chercher un algorithme basé sur l’épaisseur volumique, beaucoup plus stable au bruit et dont les valeurs sont plus pertinentes. Remplacer les valeurs renvoyées par SDF par les valeurs volumiques en chaque voxel est cependant trop simple. On pourrait imaginer plutôt un algorithme qui se baserait non pas sur les valeurs en chaque point, mais plutôt sur les boules de l’axe médian, qui contiennent davantage d’information. Nos réflexions sur un tel algorithme en sont restées là.

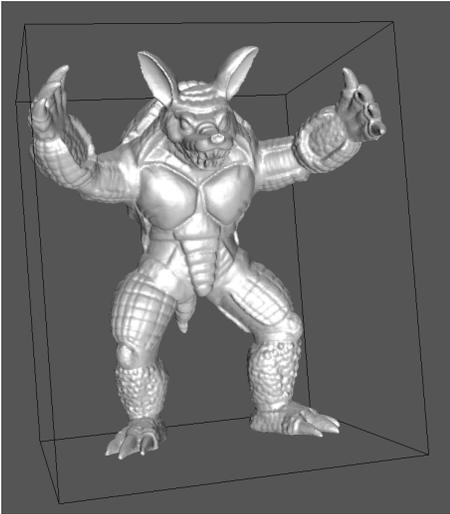


FIGURE 17 – L’objet maillé *Armadillo* (a) et l’objet voxélisé (à une résolution de 250) (b) n’ont pas le même niveau de détails (cuisses, dents ...) : c’est en cela que réside le bruit.

Plus généralement, on peut se poser ce genre de questions sur les différentes applications utilisant SDF, par exemple la squelettisation.

6 Conclusion

Nous avons apporté avec ce travail des arguments en faveur de l’épaisseur volumique, au détriment de l’utilisation de SDF. La véracité des valeurs s’est rapidement vérifiée sur des topologies simples, et nous avons montré une meilleure résistance au bruit pour l’algorithme discret, du point de vue de l’erreur locale et de l’Earth Mover Distance. Ces résultats ouvrent de nouvelles opportunités de recherche, que ce soit des améliorations algorithmiques de SDF (comme ce fut déjà le cas dans [8]), ou d’un regain d’intéressement pour la méthode discrète.

Références

- [1] L. Shapira, A. Shamir, D. Cohen-Or, *Consistent mesh partitioning and skeletonisation using the Shape Diameter Function*, Visual Computer 24 (2008), p 249 - 259.
- [2] T. Hildebrand, P. Rüegsegger, *A new method for the model-independent assessment of thickness in three-dimensional images*, Journal of Microscopy 185, (1997), p 67 - 75.
- [3] MAEVA Toolkit : Medial Axis Extraction and Volumetric Analysis, <http://liris.cnrs.fr/david.coeurjolly/code/maeva.html>
- [4] CGAL, Computational Geometry Algorithms Library. <http://www.cgal.org>.
- [5] <https://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/>
- [6] http://www.tc18.org/code_data_set/3D_images.php
- [7] D. Coeurjolly, *Fast and accurate approximation of digital shape thickness distribution in arbitrary dimension*, Computer Vision and Image Understanding 116 (2012), p 1159 - 1167.
- [8] X. Rolland-Nevière, G. Doërr, P. Alliez, *Robust diameter-based thickness estimation of 3D objects*, Graphical Models 75 (2013), p 279 - 296.
- [9] <http://www.cs.princeton.edu/~min/binvox/>.
- [10] <http://www.geomview.org/>.
- [11] <http://qvox.sourceforge.net/>.

A Contexte institutionnel et social du stage

Le LIRIS (Laboratoire d'InfoRmatique en Image et Système d'information) est une unité de recherche dont les tutelles sont le CNRS, l'INSA de Lyon, l'Université Claude Bernard Lyon 1, l'Université Lumière Lyon 2 et l'École Centrale de Lyon. Il est constitué de douze équipes de recherche et est structuré en pôles de compétences, au nombre de six. Mon stage s'est déroulé dans le bâtiment Nautibus sur le campus de l'Université Claude Bernard Lyon 1. J'ai fait parti de l'équipe M2DisCo (Modèles Multirésolution, Discrets et Combinatoires), dirigée par David Coeurjolly. Située entre les pôles "Vision intelligente et reconnaissance visuelle" et "Géométrie et modélisation", l'équipe s'intéresse à certains aspects de la géométrie algorithmique, de la géométrie discrète et de l'optimisation combinatoire.

Ce stage fut pour moi ma première expérience dans le monde de la recherche.

Durant ma première semaine de stage je travaillais au côté d'autres stagiaires. Pour des besoins matériels j'ai ensuite été transféré dans un bureau avec des thésards, pas nécessairement dans la même équipe de recherche que la mienne. Il y régnait une atmosphère à la fois studieuse et décontractée.

Pendant mon stage, j'ai beaucoup échangé avec mon tuteur de stage David Coeurjolly. Que ce soit pour des questions ou des réunions, j'ai toujours trouvé que nos discussions étaient intéressantes et faisaient progresser le projet. Nous avons également pu discuter de nos travaux avec Raphaëlle Chaine, chercheuse au LIRIS dans l'équipe GeoMod (Modélisation Géométrique, Géométrie Algorithmique, Fractales). J'ai trouvé cette discussion fort intéressante notamment parce qu'elle m'a offert un point de vue différent de celui que nous avions tout au long de notre travail.

Plus généralement, je retiens une très bonne appréciation de cette expérience dans la recherche. J'ai pu découvrir plusieurs facettes de ce qu'était le monde de la recherche, notamment dans la manière de travailler, le tout dans un cadre de travail différent de celui d'une école, mais très agréable.

B Sous-évaluation de l'épaisseur locale de la sphère par l'algorithme SDF

On note ρ la fonction d'épaisseur surfacique.

Soit \mathcal{S} une sphère, notons r son rayon. Soit P un point quelconque de la sphère. Soit Q le point diamétralement opposé à P de \mathcal{S} .

L'épaisseur "intuitive" de la sphère correspond à son rayon r . Montrons que $\rho(P) \leq r$.

L'épaisseur locale en P renvoyée par SDF correspond à une moyenne pondérée de distances à un autre point de \mathcal{S} .

Plus précisément, la pondération ω_i donnée à la distance PP_i correspond à l'inverse de l'angle entre le vecteur \vec{PP}_i et un vecteur normal à la surface de la sphère en P (par exemple le vecteur \vec{PQ})¹ :

$$\omega_i = \frac{1}{(\vec{PP}_i, \vec{PQ})}$$

On peut écrire plus précisément $\rho(P)$:

$$\rho(P) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \frac{PP_i}{2}}{\sum_{i=0}^n \omega_i}$$

Majorons la distance PP_i . Le théorème de Pythagore nous dit que pour chacun des points P_i :

$$PP_i^2 + P_iQ^2 = PQ^2$$

Et donc : $PP_i < PQ$, sauf si $P_i = Q$. On obtient finalement que :

$$\rho(P) < \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i \frac{PQ}{2}}{\sum_{i=0}^n \omega_i} = \frac{PQ}{2} = \frac{2r}{2} = r$$

Sauf si $P_i = Q$ pour tout i (auquel cas $\rho(P) = r$), ce qui arrive avec une très faible probabilité (pour ne pas dire jamais). CQFD.

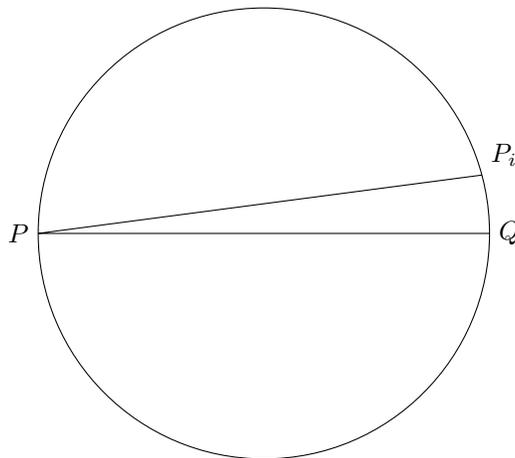


FIGURE 18 – Quelque soit le point P_i sur la sphère (en deux dimensions ici) à l'exception de Q , la distance PP_i sera toujours plus faible que la distance PQ .

1. La valeur de la pondération est en fait inutile dans cette démonstration, mais elle permet de détailler davantage l'algorithme

C Palier des profils d'épaisseur volumique

Nous avons vu que les profils d'épaisseur volumique présentent un palier final assez important. J'énonce ici de manière plus précise une esquisse de preuve de ce résultat :

Lemme 2 *Soient X un objet volumique, ρ la fonction d'épaisseur volumique, R_{max} l'épaisseur maximale de X . Alors le nombre de voxels de X d'épaisseur R_{max} est au moins de l'ordre de $\frac{4}{3}\pi.R_{max}^3$.*

Démonstration : Il existe au moins une boule incluse dans X de rayon R_{max} , notons la \mathcal{B} . Soit \mathcal{B}' une autre boule. On a par définition de \mathcal{B} :

$$\forall x \in \mathcal{B}, x \in \mathcal{B}' \Rightarrow R(\mathcal{B}') \leq R(\mathcal{B}) = R_{max}$$

Ce qui prouve que $\forall x \in \mathcal{B}, \rho(x) \leq R_{max}$ par définition de ρ . Mais on a aussi que $x \in \mathcal{B} \Rightarrow \rho(x) \geq R_{max}$, toujours par définition de ρ . Ce qui prouve que $\rho(x) = R_{max}$ pour tout x dans \mathcal{B} . Ainsi, il y a au moins les points de \mathcal{B} qui ont une épaisseur égale à R_{max} , il y en a de l'ordre de $\frac{4}{3}\pi.R_{max}^3$ (volume de la boule continue). CQFD.