

ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE LYON



9 Juin 2017

## Rapport de stage de M2

# Polygones de Newton, Onion Peeling et Problème $fg + 1$

William AUFORT



## Introduction générale

Ce stage de six mois s'est déroulé au sein de l'équipe MC2 du Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme à Lyon, sous la direction de Pascal Koiran.

En complexité algébrique, la  $\tau$ -conjecture sur les polygones de Newton [16] est une conjecture sur le nombre de sommets des polygones de Newton associés à des polynômes bivariés creux. Elle impliquerait une séparation des classes de complexité VP et VNP, qui est un des problèmes ouverts majeurs dans ce domaine. Dans [16], une approche basée sur des résultats de géométrie combinatoire, plus précisément sur les sommes de Minkowski, a été proposée. Mais cette conjecture reste non résolue même dans le cas d'un polynôme s'écrivant sous la forme  $fg + 1$ .

L'objectif de ce stage est d'étudier différentes questions relatives aux concepts précédents, dans le but de progresser sur le problème  $fg + 1$ , voir sur le problème original de la  $\tau$ -conjecture.

Ce rapport présente le travail effectué pendant ce stage. Dans un premier temps, je présente plus précisément les polygones de Newton et les sommes de Minkowski, qui sont les deux concepts centraux de ce stage. Dans un deuxième temps, je m'intéresse à la notion d'onion peeling, aux liens avec les sommes de Minkowski et les questions qui en découlent. Dans un troisième temps, je me concentre davantage sur le problème  $fg + 1$ . En ajoutant des conditions sur les polynômes  $f$  et  $g$ , nous verrons qu'on peut obtenir des résultats intéressants. Enfin, j'évoquerai quelques autres tentatives moins fructueuses, mais qui exposent des liens intéressants avec d'autres problèmes.

## Remerciements

Ce rapport est l'opportunité rêvée de remercier toutes les personnes qui ont contribué d'une manière quelconque à ce rapport et à mon stage de manière générale.

Tout d'abord, un grand merci à mon directeur de stage Pascal Koiran, qui a toujours su être disponible pour m'écouter, pour me guider dans mes recherches, et indirectement pour me motiver dans les moments de piétinement. Même si je ne souhaite pas continuer dans la recherche, j'ai beaucoup appris de cette dernière expérience. Pour cela, encore merci.

Comme un travail de recherche provient surtout de nombreuses discussions, je souhaite maintenant remercier toutes les personnes avec qui j'ai collaboré durant ce stage : Stéphane, Natacha, Sébastien, Ignacio et Timothée. Je remercie aussi les membres de l'équipe MC2, et du LIP en général, avec qui j'ai partagé de bons moments durant ce stage.

Ce rapport marque la fin de mon stage, mais également celle de mes études à l'ENS. Moi qui souhaitait devenir professeur de mathématiques depuis très longtemps, je peux dire aujourd'hui que je suis très heureux d'avoir choisi, un peu par hasard, un parcours informatique à l'ENS. Ces quatre années m'ont permis de découvrir et expérimenter un domaine dont j'ignorais tout, avec beaucoup de surprises et d'intérêt, mais également de prendre du recul sur mon projet. Je souhaite ainsi remercier tous les enseignants que j'ai eu pendant ces quatre années et qui ont ainsi permis cet épanouissement.

Mais plus que la fin de mes études à l'ENS, c'est ma vie étudiante qui se terminera dans les jours qui viennent. C'est avec un peu d'émotion que j'appréhende cette transition, mais aussi avec beaucoup d'espoir. Je ne serais jamais arrivé où je suis aujourd'hui sans un de mes professeurs de mathématiques de lycée, qui m'a orienté et préparé vers la classe préparatoire et l'ENS, et m'a poussé à tout donner pour atteindre cet objectif. Monsieur Darel, merci pour tout.

Je remercie aussi ma famille et mes amis qui m'ont épaulé pendant ce stage, même si pour la plupart d'entre eux mon travail ici semble toujours mystérieux. Plus particulièrement, je voudrais terminer en remerciant ma chère femme pour son soutien de tous les jours qui m'a été très précieux, pendant mon stage et depuis bien plus longtemps.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Polygones de Newton et sommes de Minkowski</b>	<b>3</b>
1.1	Définitions . . . . .	3
1.2	Problèmes associés et état de l'art . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Onion Peeling : couches d'un ensembles de points</b>	<b>4</b>
2.1	Définitions et lien avec le problème étudié . . . . .	4
2.2	Etude dans le cas $P + P$ avec $P$ convexe . . . . .	5
2.2.1	Cas des polygones convexes réguliers, notion de distance . . . . .	5
2.2.2	Cas $P + P + P$ . . . . .	6
2.2.3	Cas général . . . . .	8
2.3	Généralisation à $P + Q$ . . . . .	9
2.3.1	Quid de la distance? . . . . .	9
2.3.2	Relation entre couches : un résultat . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Autour du problème <math>fg + 1</math></b>	<b>12</b>
3.1	Le cas $P$ et $Q$ convexe : la genèse . . . . .	12
3.2	Quelques généralisations . . . . .	15
3.2.1	Faible convexité . . . . .	15
3.2.2	Autres suppressions de points . . . . .	16
3.2.3	Cas où seul $P$ est convexe . . . . .	17
3.3	Cas général . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Autres pistes explorées</b>	<b>18</b>
4.1	Structure des annulations . . . . .	18
4.2	Sous-graphes interdits . . . . .	19
4.3	Lien avec le problème des distances unitaires . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>20</b>

# 1 Polygones de Newton et sommes de Minkowski

## 1.1 Définitions

Soit  $f$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X, Y]$ , où  $\mathbb{K}$  désigne un corps de caractéristique nulle. Pour chaque monôme  $X^i Y^j$  apparaissant dans  $f$  avec un coefficient non nul, on associe le point de coordonnées  $(i, j)$  du plan. L'ensemble des points obtenus est noté  $\text{Mon}(f)$ . Cet ensemble représente donc les monômes apparaissant dans  $f$ , mais pas les coefficients associés. On définit alors le polygone de Newton de  $f$ , noté  $\text{Newt}(f)$ , comme étant  $\text{Conv}(\text{Mon}(f))$ , où  $\text{Conv}(X)$  désigne l'enveloppe convexe de  $X$ . Dans certains cas qui seront mentionnés, si  $X$  est un ensemble de points,  $\text{Conv}(X)$  pourra désigner l'ensemble des sommets de l'enveloppe convexe de  $X$ , et non pas le convexe lui-même. On dira pour abrégé qu'un ensemble de points ou un polygone est convexe si ses points sont en position convexe.

Soient  $P$  et  $Q$  deux ensembles de points de  $\mathbb{R}^2$ . La somme de Minkowski de  $P$  et  $Q$ , notée  $P + Q$ , est l'ensemble :

$$P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$$

La figure 1 illustre ces deux définitions avec  $f(X, Y) = 1 + 2X^3Y + XY^2 + XY^3$ ,  $g(X, Y) = -1 + Y^2 + X^2Y$  et  $P + Q = \text{Mon}(f) + \text{Mon}(g)$ .

Remarquons qu'on peut également voir la somme de Minkowski  $P + Q$  comme l'ensemble des milieux des segments dont une des extrémités est dans  $P$  et l'autre dans  $Q$  (modulo une homothétie). En effet, l'ensemble de ces milieux est exactement  $\frac{P+Q}{2}$ . Ce point de vue sera celui utilisé durant toute la partie 2.

Cet exemple permet de mettre en évidence une propriété faisant le lien entre les deux notions présentées : le polygone de Newton d'un produit de polynômes est la somme de Minkowski de leurs polygones de Newton. Une preuve simple de ce résultat se trouve dans [10], le point principal consiste à montrer que les sommets de  $\text{Newt}(fg)$  s'écrivent de manière unique sous la forme  $p + q$ , avec  $p \in \text{Newt}(f)$  et  $q \in \text{Newt}(g)$ .

On peut construire simplement  $P + Q$  à partir de  $P$  et  $Q$  deux polygones convexes. On ordonne les sommets de  $P$  et  $Q$  dans le sens des aiguilles d'une montre, en partant à chaque fois du point le plus à gauche. Alors  $p_1 + q_1 \in P + Q$ , puis on construit itérativement  $P + Q$  : si  $p_i + q_j \in P + Q$ , alors le prochain point est soit  $p_{i+1} + q_j$ , soit  $p_i + q_{j+1}$ , en fonction de la pente des arêtes  $[p_i p_{i+1}]$  et  $[q_j q_{j+1}]$ . En particulier si  $p_i$  (respectivement  $q_j$ ) apparaît dans une somme sur  $\text{Newt}(fg)$ , alors les sommets de  $\text{Newt}(fg)$  où  $p_i$  (respectivement  $q_j$ ) apparaît sont consécutifs. On se servira de cette propriété dans la partie 2.3.1. De manière plus informelle, on ordonne par angle polaire les arêtes de  $P$  et de  $Q$ , puis on forme la chaîne polygonale en assemblant ces arêtes de bout en bout [1]. La figure 1 illustre cette construction.

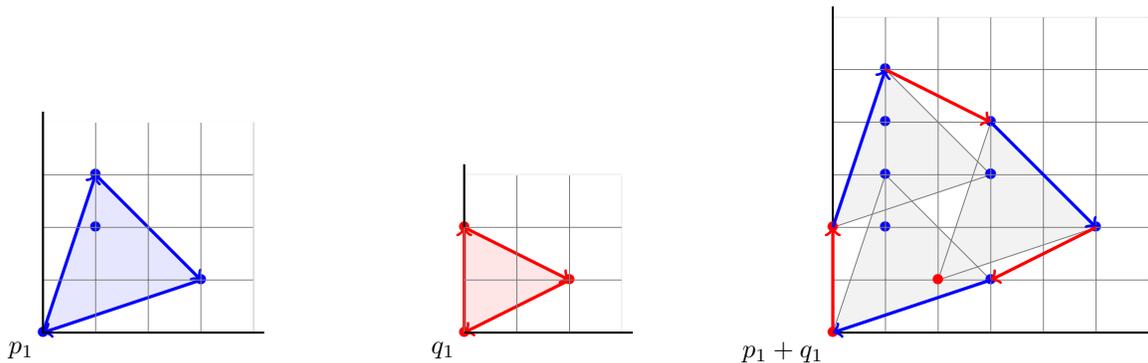


FIGURE 1 – Illustrations des constructions de  $\text{Newt}(f)$ ,  $\text{Newt}(g)$  et  $\text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$ .

En particulier, on en déduit que si  $\text{Newt}(f)$  a  $n$  arêtes, et si  $\text{Newt}(g)$  a  $m$  arêtes, alors  $\text{Newt}(fg)$  a au plus  $n + m$  arêtes, mais peut avoir  $nm$  monômes. On peut généraliser cette propriété à un produit de  $k$  polynômes : si  $(g_i)$  sont des polynômes avec  $(t_i)$  monômes, alors le polygone de Newton de  $f = g_1 \dots g_k$  a au plus  $\sum_{i=1}^k t_i$  arêtes.

## 1.2 Problèmes associés et état de l'art

Nous venons de voir que le nombre d'arêtes des polygones de Newton se comporte bien par rapport au produit. En revanche, le cas d'une somme de deux polynômes est plus difficile, car certains monômes peuvent s'annuler, et ainsi changer significativement le polygone de Newton. La  $\tau$ -conjecture s'intéresse au nombre d'arêtes du polygone de Newton de polynômes du type :

$$f(X, Y) = \sum_{i=1}^k \prod_{j=1}^m f_{ij}(X, Y)$$

en fonction des paramètres  $k$ ,  $m$  et  $t = \max\{|\text{Mon}(f_{i,j})|\}$ . Dans de tels polynômes, de multiples annulations peuvent intervenir. En particulier, dans le problème  $fg + 1$  on se concentre sur une seule annulation (celle du monôme constant) : combien d'arêtes au maximum peut contenir  $\text{Newt}(fg + 1)$  si  $f$  et  $g$  ont  $n$  monômes ? Dans [16], une borne en  $\mathcal{O}(n^{4/3})$  est obtenue, ainsi qu'une borne linéaire dans un cas très particulier.

Les sommes de Minkowski sont un concept fondamental en géométrie combinatoire. Un des principaux problèmes associé est l'étude de  $M(m, n)$  le cardinal du plus grand sous-ensemble convexe  $S \subseteq P + Q$  où  $m = |P|$  et  $n = |Q|$ . Si  $P$  et  $Q$  sont quelconques, [8] prouve que  $M(m, n) = \mathcal{O}(m^{2/3}n^{2/3} + m + n)$ , puis [3] montre que cette borne est optimale, même si on suppose  $P$  est convexe. C'est cette borne supérieure que [16] utilise pour obtenir la borne en  $\mathcal{O}(n^{4/3})$  précédente, en remarquant que les sommets de  $\text{Newt}(fg + 1)$  forme un sous-ensemble convexe de  $\text{Mon}(f) + \text{Mon}(g)$ . Si  $P = Q$  est convexe, [13] prouve une borne en  $5m - 8$ , borne réduite ensuite à  $2m$  par [11] avec un argument plus simple. Ce résultat, ainsi qu'un résultat si  $P$  et  $Q$  sont convexes, sont abondamment utilisés dans tout mon travail, et méritent donc une place de choix dans ce rapport :

### Théorème 1 ([11]).

Si  $P$  est convexe et  $S \subseteq P + P$  est convexe, alors  $|S| \leq 2|P|$ .

### Théorème 2 ([18]).

Si  $P$  et  $Q$  sont convexes, et si  $S \subseteq P + Q$  est convexe, alors  $|S| = \mathcal{O}((|P| + |Q|)\log(|P| + |Q|))$ .

Enfin, dans le problème différent où on regarde l'enveloppe convexe des points de  $P+Q$  satisfaisant des contraintes linéaires, [2] prouve une borne en  $\mathcal{O}((n+m)\log(n+m))$ . Cette borne devient linéaire si on n'a qu'une seule contrainte linéaire.

L'optimalité de la borne utilisée par [16] nous prouve qu'il faudra d'autres ingrédients pour pouvoir progresser dans le problème  $fg + 1$ . Néanmoins, une différence importante réside entre ces deux problèmes : dans le problème  $fg + 1$ , on ne s'intéresse pas à n'importe quel sous-ensemble convexe de l'ensemble des monômes, on veut surtout que celui-ci se réalise, c'est-à-dire avec les annulations nécessaires des multiples points gênants. J'explorerai davantage cet aspect dans la partie 3.

## 2 Onion Peeling : couches d'un ensembles de points

J'expose dans cette partie la notion d'onion peeling sur laquelle j'ai débuté mon stage. Nous verrons de quoi il s'agit, le lien avec les problèmes évoqués précédemment, et les résultats que j'ai obtenus à ce propos.

### 2.1 Définitions et lien avec le problème étudié

Supposons que tous les coefficients des polynômes  $f$  et  $g$  sont égaux à 1. Dans ce cas, il ne peut y avoir d'annulation de monômes dans le produit  $fg$ . On peut alors voir le problème  $fg + 1$  en terme de suppressions de points : on supprime un point de  $\text{Newt}(fg)$  (en l'occurrence l'origine) et on se demande combien de sommets peuvent apparaître sur la nouvelle enveloppe convexe. Intuitivement, ces points se situent à une « profondeur » faible de  $\text{Newt}(fg)$ , plus rigoureusement sur l'enveloppe convexe de l'ensemble obtenu en supprimant  $\text{Newt}(fg)$  de  $\text{Mon}(fg)$ . On voit cet ensemble de points comme la deuxième couche de  $P$ . On peut se poser la même question pour un polynôme du type  $fg - h$ , où  $h$  représente les points que l'on souhaite annuler. Par exemple, si  $h$  supprime des points de l'enveloppe convexe et de la deuxième couche, alors ce sont les points sur la troisième couche qui interviendront. On est en train d'« épilucher » notre ensemble de points. Définissons formellement ce procédé :

**Définition 1** (Couches d'un ensemble de points).

Soit  $P \subseteq \mathbb{R}^2$ . On définit par récurrence sur  $k \geq 1$  la  $k$ -ième couche de  $P$ , notée  $\mathcal{C}_k(P)$  par :

- $\mathcal{C}_1(P) = \text{Conv}(P)$  (ici Conv désigne les sommets de l'enveloppe convexe)
- $\forall k > 1, \mathcal{C}_k(P) = \text{Conv}(P - \cup_{i=1}^{k-1} \mathcal{C}_i(P))$  tant que cette quantité n'est pas vide.

La décomposition  $(\mathcal{C}_1(P), \dots, \mathcal{C}_k(P) \neq \emptyset, \mathcal{C}_{k+1}(P) = \emptyset)$  est appelé l'onion peeling de  $P$ , et on dit que  $P$  a  $k$  couches.

La figure 2 illustre ce procédé. Cette notion a été étudiée de manière algorithmique : [5] donne un algorithme optimal en  $\mathcal{O}(n \log(n))$  pour calculer l'onion peeling d'un ensemble de  $n$  points. Les seules études combinatoires concernent l'estimation de la taille de ces onion peelings, par exemple dans le cas de points aléatoires [6] ou d'une grille de taille  $l \times l$  [14]. Dans cette partie, on se pose la question du nombre de couches d'une somme de Minkowski  $P + Q$ , mais surtout de leur taille. Ces questions n'ont, à ma connaissance, jamais été étudiées.

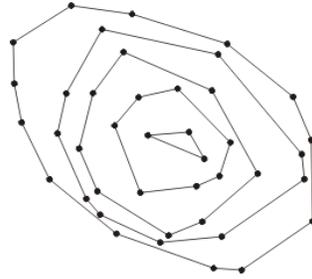


FIGURE 2 – L'onion peeling d'un ensemble de points

## 2.2 Etude dans le cas $P + P$ avec $P$ convexe

### 2.2.1 Cas des polygones convexes réguliers, notion de distance

Commençons par le cas  $P + P$ , où  $P$  est un polygone convexe régulier. Ce cas est intéressant à traiter en premier car on peut imaginer tirer profit des symétries du polygone. Il fournit également un cadre d'étude plus simple, qui peut déboucher sur une généralisation à un cas plus général, comme nous le verrons plus loin.

En voyant le polygone convexe  $P$  comme un graphe, on obtient une notion de distance entre points de  $P$ , qui correspond à la notion de distance dans le graphe. Ainsi, deux points à distance 0 sont identiques, deux points à distance 1 forment une arête de  $P$ , et ainsi de suite. Cette notion est intéressante car, dans le cas où  $P$  est le  $n$ -gone régulier, on peut caractériser les différentes couches de  $P + P$  avec cette distance :

**Théorème 3.**

Soient  $P$  le polygone régulier à  $n$  côtés, et  $d \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . L'ensemble des milieux des points de  $P$  à distance  $d$  forme la  $(d + 1)$ -ième couche de  $P + P$ . Ainsi  $|\mathcal{C}_d(P + P)| \leq n$  et  $P$  admet  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$  couches.

**Démonstration :** On montre ce résultat par récurrence forte sur  $d$ . Le résultat est vrai pour  $d = 0$  car  $P$  est un polygone convexe.

Supposons tout d'abord que  $d$  est impair,  $d = 2k + 1$ . On munit  $\mathbb{R}^2$  d'un repère orthonormé d'origine  $O$  le centre du polygone  $P$  et tel qu'un seul des sommets de  $P$  ait une ordonnée maximale et une abscisse nulle (on suppose qu'il s'agit de  $p_0$ , les points de  $P$  sont numérotés dans l'ordre trigonométrique, la numérotation étant considérée modulo  $n$  pour simplifier). On considère les paires de points à distance  $d$   $(p_k, p_{-k-1})$  et  $(p_{k+1}, p_{-k})$ . On voit que les milieux associés forment une arête  $e$  qui est orthogonale à l'axe des ordonnées (voir figure 3).

L'hypothèse de récurrence nous dit que l'ensemble des milieux de points à distance  $d' < d$  forme l'ensemble des  $d$  premières couches. Pour prouver que notre arête  $e$  est dans la  $(d + 1)$ -ième couche, il suffit de montrer que l'ensemble des milieux des points à distance au moins  $d$  est en dessous de  $e$ , c'est-à-dire qu'ils ont une ordonnée

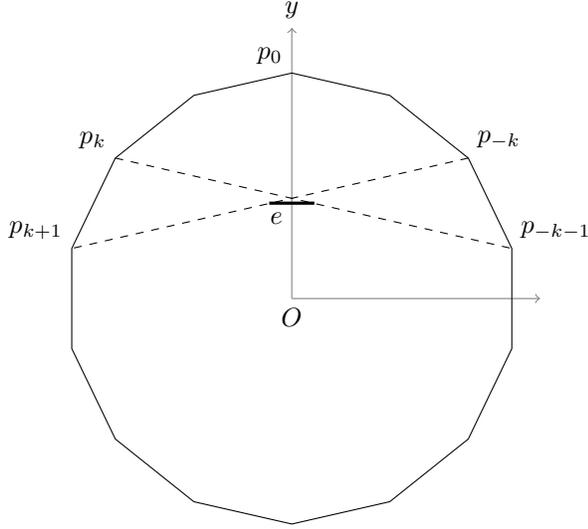


FIGURE 3 – L'arête qui nous intéresse

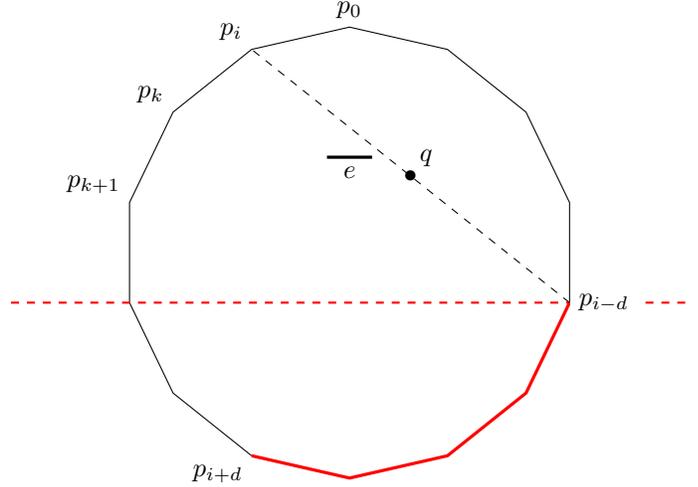


FIGURE 4 – Il suffit de regarder la paire  $(p_i, p_{i-d})$

inférieure. Si les deux points sont en dessous de  $e$ , alors le résultat est immédiat. On considère donc  $p_i$  un point de  $P$  fixé, avec  $i \in \{0, \dots, k-1\}$  ( $p_i$  est dans le coin supérieur gauche, le cas du coin supérieur droit étant symétrique) et soit  $q$  le milieu de  $p_i$  avec un autre point  $p_j$  de  $P$  à distance au moins  $d$  de  $p_i$ . On remarque que l'ordonnée de  $q$  est maximale quand  $p_j$  est le point à distance  $d$  de  $p_i$  du côté droit, soit  $p_j = p_{i-d}$  (voir figure 4). Si on prouve que le milieu de  $p_i$  et  $p_{i-d}$  est en dessous de  $e$  pour tout  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ , alors on aura le même résultat pour tous les autres milieux souhaités, ce qui permettra de conclure pour l'arête  $e$ .

On voit donc qu'il suffit de voir que les autres milieux de points à distance  $d$  sont en dessous de  $e$ , ce qui est clair car on les obtient par rotations successives de centre  $O$  le centre du polygone et d'angle  $\frac{2\pi}{n}$ . En fait l'ensemble de ces points est un polygone régulier à  $n$  côtés (ou réduit à un point si  $n$  est pair et  $t = \frac{n}{2}$ ). On en déduit que  $e$  est une arête de la  $(d+1)$ -ième couche. Par rotation (ou changement de repère), on montre le même résultat pour les autres arêtes de ce type, qui forment alors exactement le polygone régulier évoqué précédemment : c'est la  $(d+1)$ -ième couche.

Le cas où  $d$  est pair se traite avec la même méthode : on fait en sorte de placer une arête  $(p_0, p_1)$  horizontalement avec une ordonnée maximale.  $\square$

### 2.2.2 Cas $P + P + P$

Dans la preuve précédente, on a montré que l'ensemble des points à distance  $d$  est un  $n$ -gone régulier et constitue la  $(d+1)$ -ième couche de  $P$ . On peut élargir cette question à  $P + P + P$ , que l'on peut voir comme l'ensemble des isobarycentres de 3 points pris parmi les sommets de  $P$ . La notion de distance précédente devient alors caduque, par conséquent une correspondance biunivoque entre couches et « distance » semble plus difficile. On peut néanmoins trouver une borne supérieure sur le nombre de couches de  $P + P + P$  en classifiant différemment les points :

#### Théorème 4.

Soit  $P$  le polygone régulier à  $n$  côtés. Le nombre de couches de  $P + P + P$  est majoré par :

$$\frac{1}{2n} \left( \binom{n+2}{3} + \frac{2n}{3} \mathbb{1}_{3|n} + \frac{n(n+1+\mathbb{1}_{2|n})}{2} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^2}{12}$$

**Démonstration :** L'idée est de regrouper les barycentres par « paquets ». Dans le cas d'une somme de Minkowski  $P + P$ , l'ensemble des milieux de points à distance  $t$  ont le même comportement par rapport à l'appartenance des couches : ils sont tous sur la même couche, et nous avons vu qu'ils définissent exactement une couche. Pour le cas  $P + P + P$ , on peut utiliser le même raisonnement : si deux triplets de points sont égaux modulo une rotation ou une symétrie préservant le polygone régulier  $P$ , alors les isobarycentres associés seront sur la même couche. On

formalise cette idée en considérons l'action du groupe diédral  $D_n$  (le groupe des isométries du plan conservant  $P$ ) sur l'ensemble  $E$  des triplets de points (on entend combinaisons avec répétition de points) pris dans  $P$ . Les triplets contenus dans une orbite fixée de cette action sont dans une même couche de  $P+P+P$ . Ainsi, le nombre de couches est majoré par le nombre d'orbites de cette action, que l'on obtient avec la formule de Burnside :

$$\text{Card}(\Omega) = \frac{1}{\text{Card}(D_n)} \sum_{\sigma \in D_n} \text{Card}(\text{Fix}_\sigma)$$

où  $\Omega$  est l'ensemble des orbites, et  $\text{Fix}_\sigma$  est l'ensemble des éléments de  $E$  invariants par  $\sigma \in D_n$ . Etudions ces ensembles de points fixes. Il nous faut distinguer les différents cas pour  $\sigma$  :

- Cas  $\sigma = \text{Id}$  : tout élément de  $E$  est invariant par  $\text{Id}$ , le cardinal associé est donc le cardinal de  $E$ , ensemble des combinaisons (avec répétition) des points de  $P$  : il y en a  $\binom{n+2}{3}$ .
- Cas d'une rotation non triviale : L'ordre de  $\sigma$  est un diviseur  $d > 1$  de  $n$ . Le groupe cyclique engendré par  $\sigma$  agit sur l'ensemble des sommets du polygone et définit alors  $\frac{n}{d}$  orbites de taille  $d$ . Pour définir un élément de  $\text{Fix}_\sigma$ , il suffit de choisir trois points qui couvrent complètement certaines orbites. On cherche donc des entiers naturels non nuls  $d$  et  $k$  ( $k$  correspondant au nombre d'orbites couvertes) tels que  $3 = d \times k$ . Comme  $d \neq 1$  et  $3$  est premier, nécessairement  $k = 1$  et  $d = 3$ . On obtient donc une impossibilité si  $n$  n'est pas un multiple de  $3$  (car  $d$  divise  $n$ ). Si  $n$  est un multiple de  $3$ ,  $\text{Fix}_\sigma$  est non vide et est exactement une des orbites. Il y a exactement deux rotations d'ordre  $3$ , et pour chacune de ces deux rotations, on choisit une orbite parmi les  $\frac{n}{3}$  possibles. La contribution des rotations non triviales dans la formule de Burnside est donc  $\frac{2n}{3} \mathbb{1}_{3|n}$ .
- Cas d'une symétrie avec  $n$  impair : Dans ce cas, pour toute symétrie  $\sigma$ , l'axe de  $\sigma$  passe par un des sommets  $p$  du polygone : on peut choisir de prendre un ou plusieurs des éléments du triplet égal à  $p$ , et les autres sommets se répartissent en paires de sommets symétriques :
  - Le triplet  $\{p, p, p\}$  convient.
  - Tout triplet  $\{p, p, q\}$  ne convient pas (pas de paire symétrique).
  - Pour les triplets  $\{p, q, r\}$ , il faut choisir la paire  $(q, r)$  parmi les  $\frac{n-1}{2}$  paires symétriques.
  - Aucun triplet  $\{q, r, s\}$  ne convient (pas de paire symétrique).

On a alors  $1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}(n+1 + \mathbb{1}_{2|n})$  éléments dans  $\text{Fix}_\sigma$  pour chacune des  $n$  symétries.

- Cas d'une symétrie avec  $n$  pair : Quand  $n$  est pair, il existe deux types de symétries : celles dont l'axe ne passe par aucun point de  $P$ , et celles dont l'axe passe par deux points  $p_0$  et  $p_1$  de  $P$ . Dans le premier cas, il est impossible de choisir 3 points invariants par symétrie. Dans le second cas, on raisonne comme précédemment : il y a trois types de triplets.
  - $\{p_i, p_i, p_i\}$ , avec  $i = 0$  ou  $1$  : il y a deux triplets de ce type.
  - $\{p_i, p_i, p_{1-i}\}$ , avec  $i = 0$  ou  $1$  : il y a deux triplets de ce type.
  - $\{p_i, q, r\}$ , avec  $i = 0$  ou  $1$  et  $(q, r)$  est une paire de sommets symétriques : il y a  $2 \times \frac{n-2}{2}$  triplets de ce type.

Au final, on dénombre  $4 + 2 \times \frac{n-2}{2} = n + 2 = n + 1 + \mathbb{1}_{2|n}$  éléments dans  $\text{Fix}_\sigma$  pour les  $\frac{n}{2}$  symétries dont l'axe passe par deux points de  $P$ .

- De manière générale, la contribution des symétries dans la formule de Burnside est donc  $\frac{1}{2}n(n+1 + \mathbb{1}_{2|n})$ .

La formule de Burnside nous donne alors :

$$\frac{1}{\text{Card}(D_n)} \sum_{\sigma \in D_n} \text{Card}(\text{Fix}_\sigma) = \frac{1}{2n} \left( \binom{n+2}{3} + \frac{2n}{3} \mathbb{1}_{3|n} + \frac{1}{2}n(n+1 + \mathbb{1}_{2|n}) \right)$$

qui est bien la borne demandée sur le nombre de couches de  $P+P+P$ .  $\square$

Cette méthode peut s'appliquer également à une somme  $P+P+\dots+P$  quelconque, cependant je pense qu'une telle borne deviendrait vite inintéressante. D'une part, certaines orbites peuvent correspondre en réalité à des points confondus, et on peut déjà observer ce phénomène pour  $P+P+P$ . Par exemple, si  $P$  est l'hexagone régulier, le fait que  $1 + e^{i\pi/3} + (-1) = e^{i\pi/3} = 2 \times e^{i\pi/3} + e^{4i\pi/3}$  nous donne que les deux orbites  $\{(p_i, p_{i+1}, p_{i+3})\}$  et  $\{(p_i, p_i, p_{i+3})\}$  correspondent en fait aux mêmes points (voir figure 5). D'autre part, on pourrait observer avec l'augmentation du nombre de côtés un phénomène d'entrelacement des orbites qui formeraient un ensemble convexe de points. Enfin, le dénombrement des ensembles des points fixes dans les différents cas serait beaucoup plus complexe.

### 2.2.3 Cas général

Si  $P$  est convexe mais plus nécessairement régulier, la correspondance couche/distance n'est plus vraie au-delà de la troisième couche. La figure 6 montre une construction où des points à distance 2, en l'occurrence les points  $M_1$  et  $M_2$ , ne sont donc pas sur la troisième couche formée des trois points  $M_3$ ,  $M_4$  et  $M_5$ .

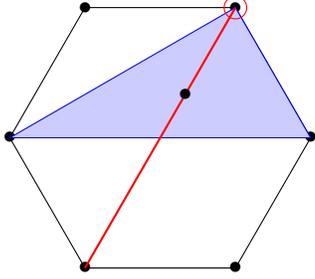


FIGURE 5 – Deux triangles sur des orbites distinctes, dont l'isobarycentre correspond à un seul point.

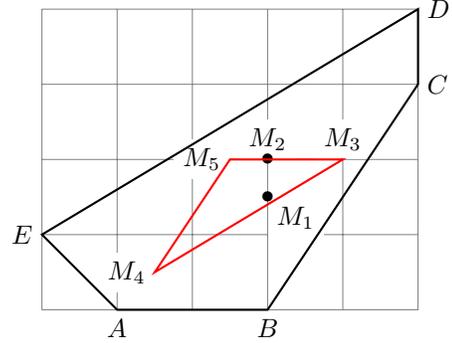


FIGURE 6 – Le contre-exemple.

On voit donc que le milieu de points à distance  $t$  peut se retrouver sur une couche plus profonde. Néanmoins, on peut quand même généraliser le théorème 3 en une propriété structurelle plus faible :

#### Théorème 5.

Soient  $P$  un polygone convexe à  $n$  côtés et  $0 < i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . L'ensemble des milieux de points de  $P$  à distance  $i$  est inclus dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des milieux de points de  $P$  à distance  $i - 1$ .

Démonstration : On utilise une propriété des points d'une enveloppe convexe très utilisée dans [1] : un point  $x \in X$  est un sommet de  $\text{Conv}(X)$  si et seulement s'il existe une direction  $\vec{d}$  telle que  $x$  est extrémal parmi les points de  $X$  dans cette direction, c'est-à-dire que  $\langle \vec{d}, x \rangle$  est maximal parmi les points de  $X$ .

Soit  $p$  milieu de  $p_0$  et  $p_i$  deux points de  $P$  à distance  $i$ . Supposons par l'absurde que  $p$  n'est pas dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des milieux de points à distance  $i - 1$ . Il existe alors une direction  $\vec{d}$  telle que  $p$  est extrémal par rapport à l'ensemble des milieux de points à distance  $i - 1$ , c'est-à-dire  $\langle \vec{d}, x \rangle > \langle \vec{d}, p \rangle$  pour tout  $p$  milieu de points à distance  $i$ .

Supposons que  $\langle \vec{d}, \overrightarrow{p_0 p_i} \rangle > 0$ . Les points  $p_1$  et  $p_i$  sont à distance  $i - 1$ , donc par hypothèse d'extrémalité de  $p$ , leur milieu  $q$  est dans le demi-plan défini par la droite  $\mathcal{D}$  orthogonale à  $\vec{d}$  passant par  $p$  et « opposé à  $\vec{d}$  » (voir figure 7, dans ce cas il est « à gauche » de  $\mathcal{D}$ ). Soit  $\mathcal{D}'$  la droite parallèle à  $\mathcal{D}$  passant par  $p_0$ .  $\mathcal{D}'$  est l'image de  $\mathcal{D}$  par l'homothétie de centre  $p_i$  de rapport 2. La position de  $q$  par rapport à  $\mathcal{D}$  nous donne par homothétie que  $p_1$  est dans le demi-plan défini par  $\mathcal{D}'$  « opposé à  $\vec{d}$  » (voir toujours figure 7). Le même raisonnement pour les points  $p_i$  et  $p_{2i-1}$  (ce dernier point existe car l'existence de points à distance  $i$  assure  $|P| \geq 2i$ ) montre que  $p_{2i-1}$  se trouve dans ce même demi-plan. Comme  $P$  est un polygone convexe, le polygone extrait  $(p_0, p_1, p_i, p_{2i-1})$  est encore convexe, ce qui est absurde d'après le positionnement de ces points (voir figure 8).

Le cas  $\langle \vec{d}, \overrightarrow{p_0 p_i} \rangle < 0$  se traite de manière similaire, en considérant cette fois les points  $p_0$ ,  $p_i$ ,  $p_{i-1}$  et  $p_{-i+1}$  et l'homothétie de centre  $p_0$ . Pour le cas  $\langle \vec{d}, \overrightarrow{p_0 p_i} \rangle = 0$ , on bouge « légèrement »  $\vec{d}$  de telle sorte qu'on retombe sur un des cas précédents et que  $p$  soit toujours extrémal dans la direction  $\vec{d}$ .  $\square$

On obtient alors, grâce à ce résultat, un théorème de structure des couches :

#### Théorème 6.

Soit  $p$  un milieu de sommets de  $P$  à distance  $i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  sur la  $j$ -ième couche de  $P + P$ . Alors  $j \geq i + 1$ .

Autrement dit, un milieu de sommets de  $P$  à distance  $i$  ne peut pas être dans une couche moins profonde que la  $(i + 1)$ -ième, qui correspond au cas d'égalité du polygone régulier.

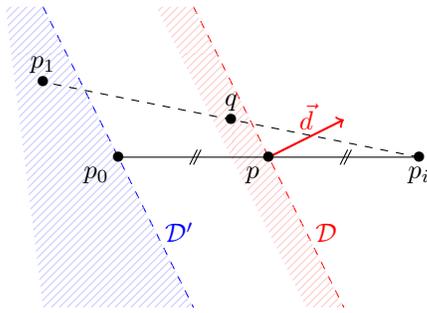


FIGURE 7 –  $p_1$  est dans un demi-plan.

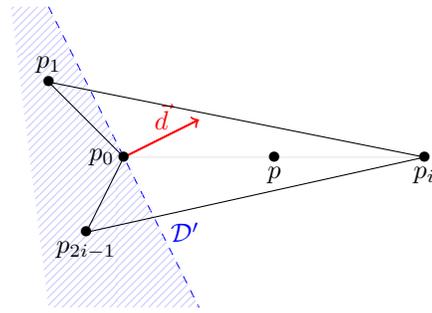


FIGURE 8 – Contradiction avec la convexité de  $P$ .

Démonstration : On montre ce résultat par récurrence sur  $i$ . C'est vrai pour  $i = 0$  car l'enveloppe convexe d'un polygone convexe est composée de l'ensemble de ses points. Supposons que le résultat est vrai pour  $i - 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  quelconque. Soit  $p$  un milieu de points à distance  $i$ . Par le théorème précédent,  $p$  est dans l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points à distance  $i - 1$ , ces points qui sont par hypothèse de récurrence sur une couche  $j$  avec  $j \geq (i - 1) + 1 = i$ . Ainsi,  $p$  est nécessairement sur une couche au moins  $i + 1$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

Comme il y a  $\mathcal{O}(n)$  paires de points de  $P$  à distance  $i$  pour tout  $i$ , on déduit facilement de ce théorème la borne  $|\mathcal{C}_i(P+P)| = \mathcal{O}(n \cdot i)$ . Malheureusement, cette borne n'est pas intéressante car le théorème 1 nous donnait déjà une borne meilleure en  $\mathcal{O}(n)$  pour tout sous-ensemble convexe quelconque de  $P + P$ , en particulier pour les différentes couches. L'intérêt maintenant est d'essayer de généraliser cet argument dans des cas où les bornes connues sont plus grossières.

## 2.3 Généralisation à $P + Q$

### 2.3.1 Quid de la distance ?

Dans toute cette partie,  $\text{Conv}(P + Q)$  désignera les sommets de l'enveloppe convexe de  $P + Q$ , et non pas le convexe lui-même.

Si l'on souhaite généraliser l'approche précédente à  $P + Q$  (que l'on suppose toujours convexes), on se heurte à une difficulté : on perd la notion de distance, car on ne cherche pas la longueur d'un chemin sur un seul polygone.

L'idée que j'ai eu pour essayer de contourner ce problème est de regarder cette distance sur  $\text{Conv}(P + Q)$ . Cette idée me semble intéressante car elle généralise le fait que les paires de points à distance 0 sont sur l'enveloppe convexe de  $P + Q$ , comme dans le cas  $P + P$ . On rappelle (voir partie 1.1) que si  $p \in P$  apparaît dans une somme sur  $\text{Conv}(P + Q)$ , alors les occurrences de  $p$  sur  $\text{Conv}(P + Q)$  sont consécutives. Par conséquent ils définissent un patatoïde, noté  $\text{Pat}(p) = \{A = p + q_i \in \text{Conv}(P + Q)\}$ , de même pour chaque point  $q$  (voir figure 9).

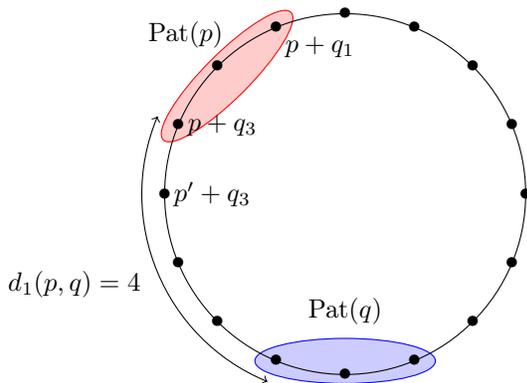


FIGURE 9 – La distance  $d_1$  entre patatoïdes.

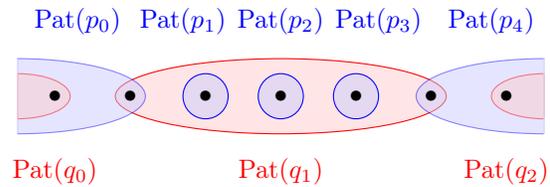


FIGURE 10 – La structure des patatoïdes de  $P$  autour du patatoïde  $\text{Pat}(q_1)$  de  $Q$ .

Observons tout d'abord la structure de ces patatoïdes. On remarque que  $\text{Pat}(p)$  et  $\text{Pat}(q)$  s'intersectent si et seulement si  $p + q \in \text{Conv}(P + Q)$ , et dans ce cas leur intersection contient exactement un point qui est  $p + q$ . Le fait que les occurrences d'un point de  $P$  ou de  $Q$  sur  $\text{Conv}(P + Q)$  sont consécutives ajoute de la structure à l'ensemble des patatoïdes de  $P$  et  $Q$  : si le successeur de  $p_i + q_j$  est  $p_{i+1} + q_j$ , alors on passe de  $\text{Pat}(p_i)$  à  $\text{Pat}(p_{i+1})$ , mais on

reste toujours sur  $\text{Pat}(q_j)$ . Et inversement, s'il s'agit de  $p_i + q_{j+1}$ , on reste dans  $\text{Pat}(p_i)$  mais on passe de  $\text{Pat}(q_j)$  à  $\text{Pat}(q_{j+1})$ . On a donc un entrelacement des patatoïdes de  $P$  dans ceux dans  $Q$  (ou inversement), on peut alors décrire précisément l'allure des patatoïdes de  $P$  autour d'un patatoïde de  $Q$  (voir figure 10).

Une distance candidate pourrait être la distance mesurée sur  $\text{Conv}(P + Q)$  entre deux patatoïdes (voir figure 9). Formellement, si  $d(A, B)$  mesure la distance entre  $A$  et  $B$  sur  $\text{Conv}(P + Q)$ , on définit  $d_1$  par :

$$d_1(p, q) = \min\{d(A, B), A \in \text{Pat}(p), B \in \text{Pat}(q)\}$$

Malheureusement, cette distance ne satisfait pas la propriété du cas  $P+P$ , à savoir que les paires de points à distances  $i$  donnent un point sur une couche de  $P + Q$  au moins  $i + 1$ . La construction de la figure 11 montre comment des points de la deuxième couche peuvent correspondre à une paire de points à une distance arbitrairement grande.

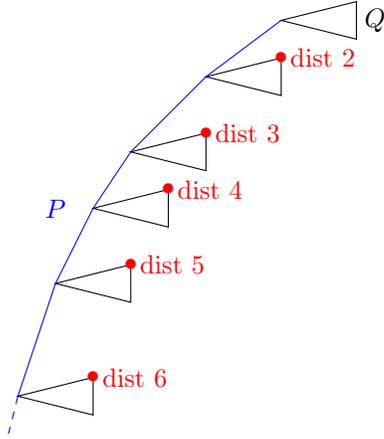


FIGURE 11 –  $d_1$  n'a pas la propriété requise.

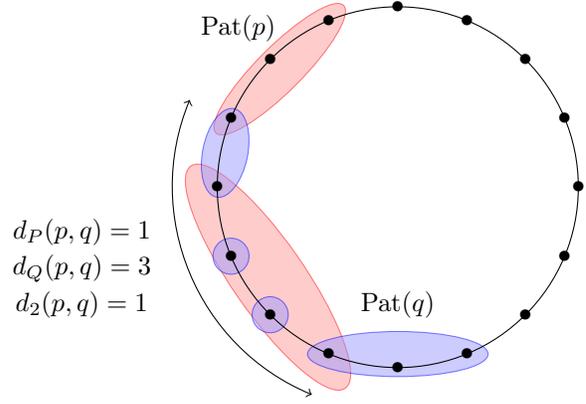


FIGURE 12 – La distance  $d_2$  entre patatoïdes.

Une autre idée consiste à regarder la distance entre les deux patatoïdes en passant par des patatoïdes et non par des sommets de  $\text{Conv}(P + Q)$ , autrement dit combien de patatoïdes de points de  $P$  ou  $Q$  les sépare (voir figure 12). Formellement, on peut définir  $d_2(p_i, q_j) = \min(d_P(p_i, q_j), d_Q(p_i, q_j))$  où

$$d_P(p_i, q_j) = \min\{d(p_i, p_{\text{opt}}), p_{\text{opt}} + q_j \in \text{Conv}(P + Q)\}$$

$$d_Q(p_i, q_j) = \min\{d(q_j, q_{\text{opt}}), p_i + q_{\text{opt}} \in \text{Conv}(P + Q)\}$$

Les distances  $d(p_i, p_{\text{opt}})$  et  $d(q_j, q_{\text{opt}})$  sont mesurées respectivement sur les polygones  $P$  et  $Q$  convexes.

Pour cette distance, j'ai tenté de trouver un contre-exemple sans résultat. Pour l'exemple de la figure 11, tous les points rouges auparavant problématiques sont à une distance  $d_2$  de 1. Ceci porte à penser que le théorème 6 pourrait être vrai dans le cas  $P + Q$  pour la distance  $d_2$  :

### Conjecture 1.

Soient  $P$  et  $Q$  sont deux polygones convexes. Soient  $p \in P$  et  $q \in Q$  avec  $d_2(p, q) = i$ . Si  $p + q$  est sur la  $j$ -ième couche de  $P + P$ , alors  $j \geq i + 1$ .

Produire une preuve du théorème analogue pour  $d_2$  sur la même idée semble délicat pour deux raisons. D'une part, si on fixe  $q \in Q$ , la fonction  $p \mapsto d_2(p, q)$  ne prend pas forcément des valeurs consécutives, ce qui rend difficile l'utilisation d'une récurrence. D'autre part, le fait qu'on ait deux polygones  $P$  et  $Q$  distincts complique les arguments de convexité utilisés précédemment : la symétrie du cas  $P = Q$  nous permettait de raisonner sur la convexité du seul polygone  $P$ , alors qu'ici on ne sait pas sur quelle convexité raisonner (peut-être celle de  $P + Q$ ).

Admettons un instant que cette conjecture soit vraie. Pour obtenir la borne en  $\mathcal{O}(n \cdot i)$  du cas  $P + P$  (qui serait intéressante dès que  $i = o(\log n)$  car la meilleure borne connue est celle donnée par le théorème 2), il nous reste quand même à borner le nombre de paires de points à distance  $i \in \mathbb{N}$ , ce qui était facile dans le cas  $P + P$ . Heureusement, on peut prouver un tel résultat :

**Théorème 7.**

Si  $P$  et  $Q$  sont convexes, le nombre de paires de points à distance  $d_2$  égale à  $k \in \mathbb{N}$  est d'au plus  $2(|P| + |Q|)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Démonstration :** Si  $k = 0$ , on a toujours que  $d_2(p, q) = 0$  si et seulement si  $p + q \in \text{Conv}(P + Q)$ . La nombre de paires de points à distance  $d_2$  nulle est donc exactement le nombre de sommets de  $P + Q$ , borné par  $|P| + |Q|$ .

Supposons maintenant  $k \geq 1$ . Cherchons tout d'abord, étant donné  $q_j \in Q$  quelconque, à caractériser les points  $p_i \in P$  vérifiant  $d_2(p_i, q_j) = k$ . On va utiliser la structure de l'ensemble des patatoïdes de  $P$  et  $Q$  introduite précédemment.

Si  $d_Q(p_i, q_j) = k$ , cela signifie qu'entre  $\text{Pat}(p_i)$  et  $\text{Pat}(q_j)$ , il y a  $k$  patatoïdes de  $Q$  intermédiaires dont l'un d'entre eux intersecte  $\text{Pat}(p_i)$ . Ce patatoïde intersectant  $\text{Pat}(p_i)$  est donc soit  $\text{Pat}(q_{j+k})$ , soit  $\text{Pat}(q_{j-k})$ . Ces deux patatoïdes contiennent des points de la forme  $p_i + q_{j \pm k}$ , ces  $p_i$  sont les seuls points pouvant vérifier  $d_Q(p_i, q_j) = k$ . On peut toutefois être un peu plus précis : il existe exactement un point  $p + q_{j+k} \in \text{Pat}(q_{j+k})$  tel que  $\text{Pat}(p)$  rencontre  $\text{Pat}(q_{j+(k-1)})$  (voir figure 10), pour ce point on a donc  $d(p, q_j) = k - 1 \neq k$  d'après le même raisonnement. Le même phénomène se produit pour  $q_{j-k}$ , ce qui prouve qu'il y a au plus  $|\text{Pat}(q_{j+k})| + |\text{Pat}(q_{j-k})| - 2$  points  $p_i$  vérifiant  $d_Q(p_i, q_j) = k$  (on a tout de même l'égalité si  $q_{j+k} \neq q_{j-k}$ ).

Si  $d_P(p_i, q_j) = k$ , entre  $\text{Pat}(p_i)$  et  $\text{Pat}(q_j)$ , il y a toujours  $k$  patatoïdes de  $P$  intermédiaires dont l'un d'entre eux intersecte  $\text{Pat}(q_j)$ . Ce patatoïde intersectant  $\text{Pat}(q_j)$  est donc soit  $\text{Pat}(p_{i+k})$  ou  $\text{Pat}(p_{i-k})$ . Il n'y a donc que deux points candidats : les points  $p_{i+k}$  et  $p_{i-k}$ .

En résumé, il y a au plus  $|\text{Pat}(q_{j+k})| + |\text{Pat}(q_{j-k})|$  points de  $P$  à distance  $k$  de  $q_j$ . On obtient donc :

$$\begin{aligned} |\{(p, q) \in P \times Q, d_2(p, q) = k\}| &= \sum_{j=1}^n |\{(p, q) \in P \times Q, d_2(p, q_j) = k\}| \\ &\leq \sum_{j=1}^n (|\text{Pat}(q_{j+k})| + |\text{Pat}(q_{j-k})|) = 2 \sum_{j=1}^n |\text{Pat}(q_j)| = 2(|P| + |Q|) \quad \square \end{aligned}$$

Cette disymétrie entre les cas  $d_P(p_i, q_j) = k$  et  $d_Q(p_i, q_j) = k$  dans la preuve peut se comprendre en regardant les fonctions discrètes  $p \mapsto d_P(p, q)$  et  $q \mapsto d_Q(p, q)$ . La première à des « paliers » de taille 1 (sauf celui correspondant à la distance 0), tandis que pour la seconde la taille des « paliers » dépend de la taille des patatoïdes de  $Q$ .

**2.3.2 Relation entre couches : un résultat**

Une autre approche pour le cas général est d'étudier les relations entre les couches de  $P$ , les couches de  $Q$  et les couches de  $P + Q$ . On ne suppose plus ici  $P$  et  $Q$  convexes, ils peuvent donc avoir plusieurs couches.

**Lemme 1.**

Si  $p \in \mathcal{C}_i(P)$ ,  $q \in \mathcal{C}_j(Q)$  et  $p + q \in \mathcal{C}_k(P + Q)$ , alors nécessairement  $k \geq i + j - 1$ .

**Démonstration :** On montre ce résultat par double récurrence sur  $j$  et  $i$ .

Supposons tout d'abord que  $j = 1$ . Si  $i = 1$  c'est évident car  $k \geq 1$ . Si  $i > 1$ ,  $p$  est  $\mathcal{C}_{i-1}(P)$  sans être extrémal. Alors,  $p + q$  est dans l'enveloppe convexe des points  $p' + q$ , où  $p'$  parcourt  $\mathcal{C}_{i-1}(P)$ , sans être extrémal. Par récurrence sur  $i$ , ces points sont au moins sur la  $(i - 1)$ -ième couche de  $P + Q$ , donc  $p + q$  est au moins sur la  $i$ -ième couche de  $P + Q$ , ce qui termine le cas  $j = 1$ .

Le cas  $j > 1$  se traite de manière similaire.  $q$  est dans  $\mathcal{C}_{j-1}(Q)$  sans être extrémal, donc  $p + q$  est dans l'enveloppe convexe des points  $p + q'$ , où  $q'$  parcourt  $\mathcal{C}_{j-1}(Q)$ , sans être extrémal. Par récurrence sur  $j$ , ces points sont au moins sur la  $(i + j - 2)$ -ième couche de  $P + Q$ , donc  $p + q$  est au moins sur la  $(i + j - 1)$ -ième couche de  $P + Q$ .  $\square$

On en déduit facilement une borne sur la taille de  $\mathcal{C}_k(P + Q)$  :

**Théorème 8.**

Pour  $P$  et  $Q$  quelconques ayant au plus  $k$  couches, on a  $|\mathcal{C}_k(P+Q)| = \mathcal{O}(k \cdot n \log n)$

Démonstration : Notons  $(n_{p_1}, \dots, n_{p_k})$  (respectivement  $(n_{q_1}, \dots, n_{q_k})$ ) les tailles des  $k$  premières couches de  $P$  (respectivement de  $Q$ ). On a  $\sum_{i=1}^k n_{p_i} \leq n$ , de même  $\sum_{j=1}^k n_{q_j} \leq n$ .

Soit  $p+q \in \mathcal{C}_k(P)$ . D'après le lemme, si  $p \in \mathcal{C}_i(P)$  et  $q \in \mathcal{C}_j(Q)$ , alors  $i+j \leq k+1$ . Autrement dit :

$$\mathcal{C}_k(P+Q) \subseteq \bigcup_{i+j \leq k+1} (\mathcal{C}_i(P) + \mathcal{C}_j(Q)) \implies \mathcal{C}_k(P+Q) = \bigcup_{i+j \leq k+1} ((\mathcal{C}_i(P) + \mathcal{C}_j(Q)) \cap \mathcal{C}_k(P+Q))$$

$(\mathcal{C}_i(P) + \mathcal{C}_j(Q)) \cap \mathcal{C}_k(P+Q)$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathcal{C}_i(P) + \mathcal{C}_j(Q)$ . Comme  $\mathcal{C}_i(P)$  et  $\mathcal{C}_j(Q)$  sont convexes, on peut donc utiliser le théorème 2 :  $|(\mathcal{C}_i(P) + \mathcal{C}_j(Q)) \cap \mathcal{C}_k(P+Q)| = \mathcal{O}((n_{p_i} + n_{q_j}) \log(n_{p_i} + n_{q_j}))$ . Par conséquent, on peut borner la taille de  $\mathcal{C}_k(P+Q)$  par :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \left( \sum_{i+j \leq k+1} (n_{p_i} + n_{q_j}) \log(n_{p_i} + n_{q_j}) \right) &= \mathcal{O} \left( \sum_{i+j \leq k+1} (n_{p_i} + n_{q_j}) \log(n) \right) = \mathcal{O} \left( \log(n) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (n_{p_i} + n_{q_j}) \right) \\ &= \mathcal{O} \left( \log(n) \sum_{i=1}^k (k \cdot n_{p_i} + n) \right) = \mathcal{O}(\log(n) \cdot k \cdot n) \quad \square \end{aligned}$$

En comparaison à la borne  $\mathcal{O}(n^{4/3})$  valable pour tout sous-ensemble convexe de  $P+Q$ , le théorème précédent donne une borne plus intéressante dès lors que  $k = o\left(\frac{n^{1/3}}{\log(n)}\right)$ , c'est notamment le cas si  $k$  est constant.

### 3 Autour du problème $fg+1$

Dans cette partie, je m'intéresse davantage au problème  $fg+1$ . Pour rappel, la meilleure borne connue jusque là est en  $\mathcal{O}(n^{4/3})$ , et on a une borne linéaire pour un cas très particulier [16]. A la fin de cette partie, nous aurons établi une borne linéaire dans le cas où  $P$  est convexe. Néanmoins, je vais présenter cette partie de manière chronologique dans ma recherche. On note dans toute cette partie  $P = \text{Mon}(f)$ ,  $Q = \text{Mon}(g)$ ,  $n = |P|$  et  $m = |Q|$ .

Remarquons tout d'abord que ce problème est intéressant quand le terme constant du polynôme  $fg$  est égal à  $-1$  (ce qui implique que  $O = (0,0) \in \text{Mon}(f) \cap \text{Mon}(g)$ ), autrement dit quand on a une annulation du terme constant. En effet, on a sinon  $|\text{Newt}(fg+1)| \leq |\text{Newt}(fg)| + 1 \leq n + m + 1$ .

#### 3.1 Le cas $P$ et $Q$ convexe : la génèse

Le point de départ de mon travail sur ce cas particulier est la borne du théorème 2 pour un sous-ensemble convexe de  $P+Q$  avec  $P$  et  $Q$  convexes, résultat que l'on peut utiliser directement pour  $\text{Newt}(fg+1)$ . L'objectif ici est de s'affranchir du terme  $\log(n)$ , et pour cela nous allons nous baser sur l'élégante preuve de ce théorème [18]. Le principe fondamental est la décomposition en chaînes monotones d'un polygone convexe (voir [12] pour la définition formelle) :

**Définition 2.**

- Soit  $P = \{p_1, \dots, p_k\}$  un polygone convexe dont les sommets sont orientés dans le sens des aiguilles d'une montre. On dit que  $P$  est une chaîne  $NE$  (pour Nord-Est) si :  
 $\forall 1 \leq i, j \leq k \quad x_{p_i} \leq x_{p_j}$  et  $y_{p_i} \geq y_{p_j}$ .
- On définit de même les chaînes  $NO$ ,  $SE$  et  $SO$ .
- Tout polygone  $P$  convexe peut être décomposé dans ces quatre types de chaînes (voir figure 13), on notera  $P_{NO}$ ,  $P_{NE}$ ,  $P_{SE}$  et  $P_{SO}$  les chaînes correspondantes.

Remarquons d'abord que  $P$  et  $Q$  n'ont pas de chaîne  $SO$  (comme dans la figure 13). En effet, si  $P$  a une chaîne  $SO$  non triviale, alors l'extrémité gauche de cette chaîne est forcément le point le plus à gauche de  $P$ , à savoir  $O$  (ceci est vrai si la dernière arête de cette chaîne n'est pas verticale. Sinon, on peut considérer que cette arête est dans la chaîne  $NO$ ). On procède de façon similaire pour l'extrémité droite si l'arête associée est horizontale). Mais alors le point suivant  $O$  dans la chaîne  $SO$  a une ordonnée négative, ce qui est impossible.

Focalisons-nous maintenant sur la structure de  $\text{Newt}(fg + 1)$ . L'idée est qu'on connaît déjà une borne partie de ce polygone de Newton, et que la partie inconnue a une structure particulière :

**Lemme 2.**

On a  $\text{Newt}(fg + 1) = (\text{Newt}(fg) - O) \cup \mathcal{C} \cup \{A, B\}$  avec  $\mathcal{C}$  un ensemble convexe de points de  $P + Q$  inclus dans le triangle  $(O, A, B)$ , où  $A$  et  $B$  sont les voisins de  $O$  dans  $\text{Newt}(fg)$  vu comme ensemble faiblement convexe (on autorise les alignements de points, voir figure 14).

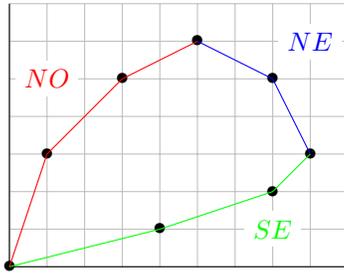


FIGURE 13 – Les chaînes associées à un polygone.

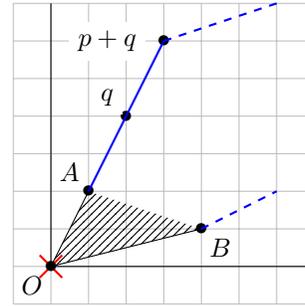


FIGURE 14 – La structure de  $\text{Newt}(fg + 1)$ . L'ensemble  $\mathcal{C}$  des points à rajouter est dans le triangle hachuré.

Démonstration : Tous les sommets distincts de  $O$  de  $\text{Newt}(fg)$  sont clairement dans  $\text{Newt}(fg + 1)$ , car l'ajout de 1 n'a entraîné que la suppression d'un seul point. La précision « comme ensemble faiblement convexe » permet de prendre en compte le cas où un des voisins de  $O$  dans  $\text{Newt}(fg)$  est de type  $p + q$  : dans ce cas, les points  $p$ ,  $q$  et  $O$  sont alignés (voir figure 14). Il nous faut encore distinguer deux sous-cas : si  $p = q$  et  $p \notin \text{Mon}(fg)$  (autrement dit  $p$  et  $q$  s'annulent), alors  $A = p + q$ . Sinon,  $A$  est soit  $p$  soit  $q$  selon la distance à  $O$  (voir toujours la figure 14), et donc sera dans  $\text{Newt}(fg + 1)$ . Le même raisonnement permet de définir  $B$ . Notons que l'on rajoute au plus deux points qui n'étaient pas dans  $\text{Newt}(fg)$ . Comme  $\mathcal{C} \subseteq \text{Newt}(fg + 1)$ ,  $\mathcal{C}$  est clairement convexe, et l'inclusion dans le triangle  $(O, A, B)$  provient de la convexité de  $\text{Newt}(fg)$  et de  $\text{Newt}(fg + 1)$ .  $\square$

On peut également décomposer  $\mathcal{C}$  en chaînes monotones, avec une particularité : la chaîne  $NE$  de  $\mathcal{C}$  est la chaîne triviale  $A, B$  (voir figure 15). En effet, supposons que la chaîne  $NE$  de  $\mathcal{C}$  contient un point  $C$  différent de  $A$  et  $B$ . Si  $C$  n'est pas une extrémité de la chaîne, alors  $C$  est au dessus du segment  $[AB]$ , c'est absurde car  $C \in \mathcal{C}$ . Si  $C$  est l'extrémité droite, alors  $C$  est en dessous de  $[OB]$ , absurde car  $[OB]$  est inclus dans une arête de l'enveloppe convexe de  $P + Q$  ( $B$  n'est pas forcément l'extrémité de l'arête, voir le lemme 2). De même, si  $C$  est l'extrémité gauche,  $C$  est au dessus de  $[OA]$ , qui est aussi absurde. On note alors  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{NO} \cup \mathcal{C}_{SO} \cup \mathcal{C}_{SE}$ .

L'idée essentielle de la preuve est à présent de borner la taille des contributions des différentes chaînes de  $P$  et  $Q$  aux différentes chaînes qui composent  $\mathcal{C}$ . Formellement, on écrit :

$$\mathcal{C} = \left( \bigcup_{d \in \{NO, NE, SE\}} (P_d + Q_d) \cap \mathcal{C} \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{d, d' \in \{NO, NE, SE\} \\ d \neq d'}} (P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C} \right)$$

Un des arguments fondamentaux est utilisé de la même manière dans [18] : le cas de deux chaînes de type différent se traite facilement :

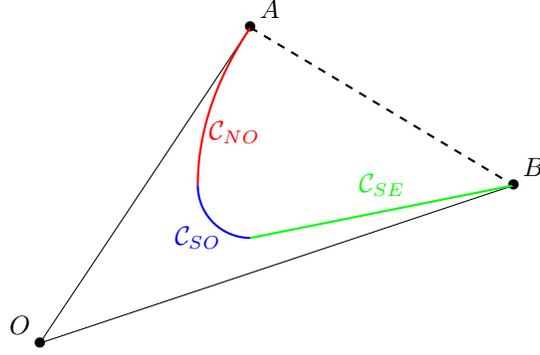


FIGURE 15 – Les chaînes associées à l'ensemble  $\mathcal{C}$  de points ajoutés.

**Lemme 3.**

Si  $d \neq d'$ , alors  $|(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}| \leq 2(|P_d| + |Q_{d'}|)$ .

Démonstration :  $(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}$  est un sous-ensemble convexe (car  $\mathcal{C}$  convexe) de  $P_d + Q_{d'}$  deux chaînes de type différent. Remarquons qu'on peut translater l'une des deux chaînes (par exemple  $P_d$ ) d'un vecteur  $\vec{u}$  de sorte que  $(P_d + \vec{u}) \cup Q_{d'}$  soit convexe. On peut voir alors  $(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}$  comme le translaté d'un sous-ensemble convexe de  $((P_d + \vec{u}) \cup Q_{d'}) + ((P_d + \vec{u}) \cup Q_{d'})$ , dont on peut borner la taille par le théorème 1. Comme le caractère convexe reste inchangé par translation, on en déduit le résultat.  $\square$

Reste le cas de chaînes de même type. On fixe maintenant  $d \in \{NO, NE, SE\}$ . L'idée est cette fois d'utiliser la décomposition  $\mathcal{C}$  en chaînes monotones déjà évoqué et de regarder séparément les contributions de  $P_d + Q_d$ . On écrit :

$$(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C} = \bigcup_{d' \in \{NO, SO, SE\}} (P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}$$

Comme précédemment, on distingue le cas  $d = d'$  du cas  $d \neq d'$ . Le cas facile reste encore  $d \neq d'$  et fait apparaître un deuxième type d'argument fondamental qui concerne les types de chaînes :

**Lemme 4.**

Si  $d \neq d'$ , alors  $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$ .

Démonstration : On forme le graphe biparti  $G = (V, E)$  où  $V = P_d \cup Q_d$  et  $E = \{(p, q) \in P_d \times Q_d, p + q \in \mathcal{C}_{d'}\}$ . On va montrer que tout sommet de  $G$  a un degré au plus 2, on aura alors :

$$|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| = |E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V} \deg v \leq |P_d| + |Q_d|$$

En effet, supposons que  $p \in P_d$  a un degré au moins 3. Il existe donc trois points  $(q_1, q_2, q_3)$  de  $Q_d$  tels que  $p + q_i \in \mathcal{C}_{d'}$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ . En particulier, ces points forment une sous-chaîne de  $\mathcal{C}_{d'}$ , donc de type  $d'$ . Mais comme les  $q_i$  sont dans  $Q_d$ , ils forment une chaîne de type  $d$ , et donc les points  $p + q_i$  forment une chaîne translaturée qui est également du type  $d$ , d'où une contradiction car  $d \neq d'$ . Le cas où  $q \in Q_d$  a un degré au moins 3 se traite de manière similaire.  $\square$

Ce lemme nous permet de majorer  $|(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}|$  sauf dans les cas  $d = d' = NO$  et  $d = d' = SE$ . On traite ces deux cas à part :

**Lemme 5.**

$$|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_d| \leq |P_d| + |Q_d| \text{ pour } d \in \{NO, SE\}.$$

Démonstration : Considérons le cas  $d = NO$ . On rappelle que le segment  $[OA]$  ne correspond pas forcément à une arête de  $P$  ou de  $Q$  (se souvenir du cas où  $p = q$  se neutralisent). On note  $A = p + q$ . Pour tout  $p' \in P_{NO}$  différent de  $O$ , et tout  $q' \in Q_{NO}$  différent de  $O$ , par propriétés des chaînes  $NO$ , on a  $y_{p'+q'} \geq y_{p+q} = y_A$ , avec égalité si et seulement si  $p' = p$  et  $q' = q$ . Or  $A$  est l'extrémité de  $\mathcal{C}_{NO}$  d'ordonnée maximale, donc  $p' + q' \notin \mathcal{C}_d$ . Ainsi  $\mathcal{C}_{NO}$  ne peut contenir que des éléments de la forme  $O + q$  ou  $p + O$ , donc  $|(P_{NO} + Q_{NO}) \cap \mathcal{C}_{NO}| \leq |P_{NO}| + |Q_{NO}|$ . Le cas  $d = SE$  se traite de manière similaire, en considérant l'extrémité  $B$ .  $\square$

La conjonction de ces différentes bornes nous donne :

$$\begin{aligned} |\text{Newt}(fg + 1)| &\leq |\text{Newt}(fg)| + |\mathcal{C}| \\ &\leq n + m + \underbrace{3(|P_{NO}| + |Q_{NO}|)}_{NO \times NO} + \underbrace{2(|P_{NE}| + |Q_{NO}|)}_{NE \times NO} + \underbrace{2(|P_{SE}| + |Q_{NO}|)}_{SE \times NO} \\ &\quad + \underbrace{2(|P_{NO}| + |Q_{NE}|)}_{NO \times NE} + \underbrace{3(|P_{NE}| + |Q_{NE}|)}_{NE \times NE} + \underbrace{2(|P_{SE}| + |Q_{NE}|)}_{SE \times NE} \\ &\quad + \underbrace{2(|P_{NO}| + |Q_{SE}|)}_{NO \times SE} + \underbrace{2(|P_{NE}| + |Q_{SE}|)}_{NE \times SE} + \underbrace{3(|P_{SE}| + |Q_{SE}|)}_{SE \times SE} \\ &= n + m + 7(|P_{NO}| + |P_{NE}| + |P_{SE}| + |Q_{NO}| + |Q_{NE}| + |Q_{SE}|) + \mathcal{O}(1) \\ &= 8(n + m) + \mathcal{O}(1) \end{aligned}$$

**Théorème 9.**

Soient  $f, g \in \mathbb{K}[X, Y]$ . Si  $\text{Mon}(f)$  et  $\text{Mon}(g)$  sont convexes, alors  $|\text{Newt}(fg + 1)|$  est linéaire.

Cette preuve fait apparaître deux types d'arguments intéressants : un argument utilisant la borne linéaire pour  $S \subseteq P + P$  convexe, qui a permis de traiter beaucoup de contributions, et un argument utilisant les types des chaînes.

## 3.2 Quelques généralisations

### 3.2.1 Faible convexité

Une première généralisation est le cas où  $P$  et  $Q$  sont faiblement convexes, c'est-à-dire qu'on autorise des points de  $P$  (respectivement de  $Q$ ) sur les arêtes de  $\text{Conv}(P)$  (respectivement de  $\text{Conv}(Q)$ ). La modification principale par rapport au cas convexe concerne les points  $A$  et  $B$ , extrémités de l'ensemble  $\mathcal{C}$ . En effet, les alignements de points étant autorisés, on peut avoir beaucoup plus qu'une seule annulation, l'exemple de la série géométrique :

$$(1 + XY + X^2Y^2 + \dots + X^nY^n)(1 - XY) = 1 - X^{n+1}Y^{n+1}$$

le montre bien. Il nous faut donc revoir la définition de  $A$  et  $B$ . Soient  $A'$  et  $B'$  les sommets voisins de  $O$  dans  $\text{Newt}(fg)$ . On peut alors définir  $A$  comme le point de  $\text{Mon}(fg)$  le plus proche de  $O$  sur l'arête  $[OA']$  (autrement dit, le premier monôme de  $]OA']$  non annulé, voir figure 16). On définit de la même manière  $B$ .

On peut reprendre une grande partie de la preuve précédente : les lemmes 3 et 4 sont toujours valables, il suffit de trouver un autre argument pour les deux derniers cas, à savoir  $(P_{NO} + Q_{NO}) \cap \mathcal{C}_{NO}$  et  $(P_{SE} + Q_{SE}) \cap \mathcal{C}_{SE}$ .

Ce nouvel argument fondamental est un argument de pentes : on reforme le graphe  $G$  du lemme 4. Supposons que  $p \in P_{NO}$  a deux voisins  $(q_1, q_2) \in Q_{NO}^2$  avec  $x_{q_1} \leq x_{q_2}$ . Cela signifie que  $p + q_1$  et  $p + q_2$  sont dans  $\mathcal{C}_{NO}$  (voir figure 16). Notons pour tout couple  $(p_1, p_2)$  de points,  $\text{pente}(p_1, p_2)$  la pente de la droite joignant  $p_1$  et  $p_2$ . On a :

$$\text{pente}(q_1, q_2) = \text{pente}(p + q_1, p + q_2) > \text{pente}(p + q_1, A) \text{ par convexité de } \mathcal{C}.$$

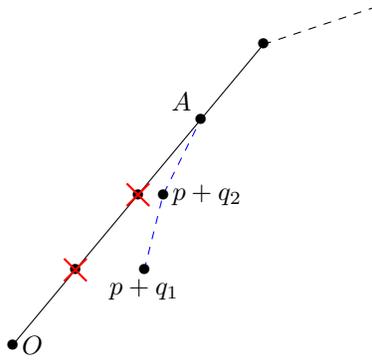


FIGURE 16 – Le nouveau point  $A$  et l'argument des pentes.

Par convexité de  $\text{Newt}(fg)$ ,  $p + q_1$  est en dessous de  $[OA]$ , et d'abscisse plus faible que  $A$  car  $p + q_1 \in \mathcal{C}_{NO}$ , par conséquent  $\text{pente}(p + q_1, A) > \text{pente}(O, A)$ . De plus  $\text{pente}(O, A) \geq \text{pente}(q_1, q_2)$  par convexité de  $Q$  et par définition de  $\text{Newt}(fg)$  ( $A$  n'est pas forcément un point de  $P$ , mais la pente entre  $O$  et  $A$  est supérieure à toutes les autres pentes de  $Q_{NO}$  par convexité). Au final,  $\text{pente}(q_1, q_2) > \text{pente}(q_1, q_2)$ , ce qui est absurde. On en déduit que tout  $p \in P_{NO}$  a au plus un voisin dans  $G$ . Le même raisonnement pour  $Q$  prouve que  $|(P_{NO} + Q_{NO}) \cap \mathcal{C}_{NO}| \leq \min(|P_{NO}|, |Q_{NO}|)$ . On procède de même pour  $(P_{SE} + Q_{SE}) \cap \mathcal{C}_{SE}$ , et on obtient bien que :

**Théorème 10.**

Soient  $f, g \in \mathbb{K}[X, Y]$ . Si  $\text{Mon}(f)$  et  $\text{Mon}(g)$  sont faiblement convexes, alors  $|\text{Newt}(fg + 1)|$  est linéaire.

On remarque que la borne obtenue avec cet argument des pentes est meilleure que celle du lemme 5, on pourrait même combiner les deux approches pour obtenir une borne constante sur les deux derniers cas. Une autre remarque importante et que si on suppose qu'un seul des deux polygones est convexe, on obtient quand même une borne nous permettant de conclure (dans la preuve précédente, la seule convexité de  $Q$  prouve  $|(P_{NO} + Q_{NO}) \cap \mathcal{C}_{NO}| \leq |P_{NO}|$ ), ce qui sera très utile dans la suite (voir partie 3.2.3).

### 3.2.2 Autres suppressions de points

Une généralisation naturelle du problème  $fg + 1$  est le problème  $fg + c x^\alpha y^\beta$ , avec  $(\alpha, \beta)$  un monôme quelconque de  $\text{Newt}(fg)$  qui n'est plus dans  $\text{Mon}(fg + c x^\alpha y^\beta)$  (les autres cas sont évidents) : on supprime cette fois un point quelconque de l'enveloppe convexe. Le problème  $fg + 1$  en est un cas très particulier, du à la position spéciale de l'origine. Pour ce problème plus général, il faut distinguer trois cas selon la position de  $(\alpha, \beta)$  sur  $\text{Newt}(fg)$  :

- $(\alpha, \beta)$  appartient à une seule chaîne de  $\text{Newt}(fg)$ .
- $(\alpha, \beta)$  appartient à deux chaînes consécutives de  $\text{Newt}(fg)$ .
- $(\alpha, \beta)$  appartient à deux chaînes non consécutives de  $\text{Newt}(fg)$ , une des chaînes intermédiaires est donc triviale.

Le problème  $fg + 1$  fait partie du dernier cas, on peut considérer qu'il a été prouvé précédemment. Regardons maintenant le premier cas et comment se généralise la preuve précédente. Sans perte de généralité, supposons que  $(\alpha, \beta)$  est sur la chaîne  $NO$  de  $\text{Newt}(fg)$ . Le lemme 2 de structure, ainsi que les deux premiers arguments fondamentaux (lemmes 3 et 4) sont toujours valables. En particulier les points  $A$  et  $B$  sont toujours définis (cette fois comme voisins du point  $(\alpha, \beta)$ ). Mais ici la décomposition en chaînes de  $\mathcal{C}$  est triviale :  $\mathcal{C}$  est forcément une chaîne  $NO$ . Arrivé ici, on se rend compte que la seule contribution qui ne soit pas encore élucidée est  $(P_{NO} + Q_{NO}) \cap \mathcal{C}_{NO}$ . Notons  $(\alpha, \beta) = p_i + q_j$  et supposons que les sommets de  $P$  et  $Q$  sont numérotés dans le sens des aiguilles d'une montre. On définit  $P_{<i}$  le sous-ensemble de  $P_{NO}$  constitué des points  $p_{i'}$  avec  $i' < i$ . On définit de la même manière  $Q_{<i}$ ,  $P_{>i}$  et  $Q_{>j}$ .

Pour borner  $|(P_{<i} + Q_{>j}) \cap \mathcal{C}|$ , on remarque que la preuve du lemme 3 peut être réutilisée : on peut déplacer  $P_{<i}$  et  $Q_{>j}$  de sorte que l'ensemble union soit convexe, ce qui donne  $|(P_{<i} + Q_{>j}) \cap \mathcal{C}| = \mathcal{O}(|P_{<i}| + |Q_{>j}|)$  grâce au théorème 1. La même méthode s'applique pour  $(P_{>i} + Q_{<j}) \cap \mathcal{C}$ . Maintenant, pour  $P_{<i} + Q_{<j}$ , il suffit de voir qu'aucun de ces points ne peut apparaître dans  $\mathcal{C}$ . En effet, pour tout  $p \in P_{<i}$  et tout  $q \in Q_{<j}$ , on a  $x_{p+q} \leq x_A$

avec égalité si et seulement si  $p + q = A$ , or  $A$  est l'extrémité gauche de  $\mathcal{C}$  (cet argument est une adaptation du lemme 5). Le cas  $P_{>i} + Q_{>j}$  se traite de la même manière en considérant  $B$ . Enfin, les points restants  $p_i + Q_{NO}$  et  $P_{NO} + q_j$  sont en nombre linéaire, d'où au final  $|(P_{NO} + Q_{NO}) \cap \mathcal{C}| = \mathcal{O}(|P_{NO}| + |Q_{NO}|)$ , ce qui conclut la preuve dans ce cas.

Le même type de raisonnement s'applique pour le second cas, où cette fois  $\mathcal{C}$  est composé de deux chaînes. Finalement, on a montré que :

**Théorème 11.**

Soient  $f, g \in \mathbb{K}[X, Y]$ ,  $c \in \mathbb{K}$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ . Si  $\text{Mon}(f)$  et  $\text{Mon}(g)$  sont convexes, alors  $|\text{Newt}(fg + c x^\alpha y^\beta)|$  est linéaire.

On peut se poser aussi la question de la suppression de plusieurs points, qui correspondrait à un problème  $fg + h$  où  $h$  est le polynôme correspondant aux points annulés. Soit  $k$  le nombre de points supprimés sur  $\text{Newt}(fg)$ . Si ces points ne sont pas consécutifs, alors on crée exactement  $k$  chaînes  $\mathcal{C}$  et on peut raisonner comme précédemment sur chacune d'elle. Chaque chaîne contient un nombre linéaire d'arêtes, on obtient alors une borne en  $\mathcal{O}(k \cdot n)$ .

Si les points sont consécutifs, on peut adapter la décomposition précédente. Supposons que les points à supprimer sont entre  $p_{i_1} + q_{j_1}$  et  $p_{i_2} + q_{j_2}$  (inclus) et sont sur une seule chaîne de  $\text{Newt}(fg)$  (par exemple la chaîne  $NO$ ). On définit comme précédemment  $P_{<i_1}$ ,  $P_{i_1 \leq \cdot \leq i_2}$  et  $P_{>i_2}$ , de même pour  $Q$ . Les arguments précédents permettent de conclure sur toutes les contributions de  $P_{NO} + Q_{NO}$ , sauf pour  $P_{i_1 \leq \cdot \leq i_2} + Q_{j_1 \leq \cdot \leq j_2}$ , car on a aucune hypothèse sur l'ordonnement des pentes. La seule borne qu'on peut utiliser dans ce cas est la borne du théorème 2 pour  $S \subseteq P_{i_1 \leq \cdot \leq i_2} + Q_{j_1 \leq \cdot \leq j_2}$  convexe. L'ensemble des contributions est résumé dans le tableau suivant :

		$Q_{<j_1}$ taille $l_4$	$Q_{j_1 \leq \cdot \leq j_2}$ , taille $l_5$	$Q_{>j_2}$ , taille $l_6$
$P_{<i_1}$	taille $l_1$	0	$\mathcal{O}(l_1 + l_5)$	$\mathcal{O}(l_1 + l_6)$
$P_{i_1 \leq \cdot \leq i_2}$	taille $l_2$	$\mathcal{O}(l_2 + l_4)$	$\mathcal{O}((l_2 + l_5) \log(l_2 + l_5))$	$\mathcal{O}(l_2 + l_6)$
$P_{>i_2}$	taille $l_3$	$\mathcal{O}(l_3 + l_4)$	$\mathcal{O}(l_3 + l_5)$	0

Comme  $l_2 + l_5 = (i_2 - i_1) + (j_2 - j_1) + 1 = k + 1$  et que pour tout  $i$ ,  $l_i = \mathcal{O}(n)$ , on en déduit la borne  $\mathcal{O}(n + k \log(k))$  sur la taille de  $\text{Newt}(fg + h)$ . Si les points à supprimer couvrent deux chaînes de  $\text{Newt}(fg)$ ,  $\mathcal{C}$  contient alors deux chaînes, et on raisonne comme précédemment sur chacune de ces chaînes. Ce raisonnement peut donc se tenir pour toute suppression de points consécutifs, ce qui prouve que :

**Théorème 12.**

Soient  $f, g, h \in \mathbb{K}[X, Y]$ ,  $f$  et  $g$  ayant  $n$  monômes et  $h$  ayant  $k$  monômes, tous correspondants à des sommets consécutifs de  $\text{Newt}(fg)$ . Alors  $|\text{Newt}(fg + h)| = \mathcal{O}(n + k \log(k))$ .

Les mêmes arguments étant utilisés dans ces différentes preuves, on peut très bien imaginer combiner les différents cas précédents (suppression de points quelconques, avec  $\text{Mon}(f)$  et  $\text{Mon}(g)$  faiblement convexes). On peut remarquer également que dans beaucoup des études de cas menées, plusieurs arguments peuvent être utilisés, notamment l'argument des pentes qui jusqu'alors n'a servi que quand on ne savait plus quoi faire. Dans cette partie, j'avais choisi d'ordonner les arguments selon l'ordre chronologique dans lequel je les ai découverts et exploités. Du point de vue des raisonnements, on pourrait imaginer utiliser différemment les arguments (comme dans le cas juste après) pour obtenir des bornes meilleures (entendre « de meilleurs constantes dans les  $\mathcal{O}(\dots)$  »), mais ce n'est pas le but recherché ici.

### 3.2.3 Cas où seul $P$ est convexe

En continuant à chercher à généraliser cette borne linéaire à d'autres cas, j'ai justement remarqué qu'on peut utiliser l'argument des pentes beaucoup plus souvent, en particulier on peut s'en servir davantage pour montrer un résultat beaucoup plus général, où on a aucune hypothèse sur le polynôme  $g$  :

**Théorème 13.**

Soient  $f, g \in \mathbb{K}[X, Y]$ . Si  $\text{Mon}(f)$  est convexe, alors  $|\text{Newt}(fg + 1)|$  est linéaire.

Démonstration : On exploite différemment les arguments précédents en montrant que :

- Pour toute direction  $d$  de  $P$ , pour toute direction  $d'$  de  $\mathcal{C}$ , si  $d \neq d'$  on a  $|(P_d + Q) \cap \mathcal{C}'_{d'}| \leq 2|Q|$  : c'est exactement l'argument des chaînes du lemme 4.
- Pour toute direction  $d \in \{NO, SE\}$ , on a  $|(P_d + Q) \cap \mathcal{C}_d| \leq |Q|$  : c'est exactement l'argument des pentes vu dans la partie 3.2.1.

On compte sept couples correspondants au premier cas, et deux couples correspondants au second cas (ce sont les mêmes que ceux résumés dans le calcul concluant la preuve du théorème 9). En décomposant  $(P + Q) \cap \mathcal{C}$  en suivant ces deux résultats, on obtient :

$$\begin{aligned}
|\text{Newt}(fg + 1)| &\leq |\text{Newt}(fg)| + |\mathcal{C}| \\
&= |P| + |Q| + \sum_{d \in \{NO, SE\}} |(P_d + Q) \cap \mathcal{C}_d| + \sum_{d \neq d'} |(P_d + Q) \cap \mathcal{C}'_{d'}| \\
&\leq |P| + |Q| + \sum_{d \in \{NO, SE\}} |Q| + \sum_{d \neq d'} 2|Q| \\
&= |P| + |Q| + |Q|(2 \times 1 + 7 \times 2) = |P| + 17|Q| \quad \square
\end{aligned}$$

### 3.3 Cas général

Les arguments précédents, notamment l'argument des pentes se heurtent au cas où  $P$  et  $Q$  ont deux couches, et donc à fortiori sur des cas plus généraux. Quand  $P$  était convexe, on pouvait obtenir des résultats en se ramenant à une contradiction sur les pentes de  $P$  ou la convexité de  $P$ , alors que dans le cas où  $P$  et  $Q$  ont deux couches, les deuxièmes couches de  $P$  et  $Q$  ne sont pas reliées aux premières : elles semblent indépendantes de ce qui se passe sur les premières couches. Il semble donc qu'il nous faille un nouvel argument pour pouvoir progresser en suivant cette idée. J'expose une piste dans la partie 4.1.

Dans le cas général où  $P$  et  $Q$  ont au plus  $k$  couches, on peut quand même obtenir un résultat très similaire au théorème 8 car utilisant la même méthode :

**Théorème 14.**

Soient  $f, g \in \mathbb{K}[X, Y]$  quelconques. On a  $|\text{Newt}(fg + 1)| = \mathcal{O}(k \cdot n \log n)$

Démonstration : Pour tous  $i$  et  $j$ ,  $\text{Newt}(fg + 1) \cap (\mathcal{C}_i(P) + \mathcal{C}_j(Q))$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathcal{C}_i(P) + \mathcal{C}_j(Q)$  qui est la somme de deux convexes, on peut réutiliser le théorème 2. Les calculs qui s'en suivent sont les mêmes que ceux du théorème 8, et débouchent donc sur la même borne.  $\square$ .

Comme dans le cas du théorème 8, ce résultat donne une borne plus intéressante que la meilleure borne connue, dès lors que  $k = o\left(\frac{n^{1/3}}{\log(n)}\right)$ .

## 4 Autres pistes explorées

### 4.1 Structure des annulations

Si on souhaite progresser encore sur le problème  $fg + 1$ , mon impression est qu'il faut se concentrer davantage sur la structure des annulations possibles de coefficients dans le produit  $fg$ . Dans le cas général, sans considérer ces annulations, le problème  $fg + 1$  est très similaire au problème sur les sommes de Minkowski, à savoir trouver le cardinal du plus grand sous-ensemble convexe de  $P + Q$ , mais on a déjà dit que pour ce problème la borne  $\mathcal{O}(n^{2/3}m^{2/3} + n + m)$  [8] est optimale [3]. En effet, on peut imaginer que si un grand sous-ensemble convexe existe,

alors on peut choisir les coefficients des polynômes  $f$  et  $g$  de sorte que ce sous-ensemble devienne exactement le polygone de Newton de  $fg + 1$ .

Néanmoins, mon intuition est que si dans  $\text{Newt}(fg + 1)$  on souhaite voir des points appartenants à des couches profondes, alors de nombreuses annulations sur toutes les couches moins profondes sont nécessaires, ce qui me semble fort contraignant. J'ai tenté quelques raisonnements dans cette direction (trouver des points dont les annulations sont très contraignantes, ou des points qui ne peuvent pas être annulés) dans les situations les plus simples (par exemple si  $P = Q$ , ou si  $P$  et  $Q$  ont deux couches) sans résultat.

## 4.2 Sous-graphes interdits

Une autre possibilité pour progresser dans le problème  $fg + 1$  consiste à oublier les annulations, et donc comme rappelé juste avant, à se concentrer sur le problème de la taille maximale d'un sous-ensemble convexe  $S$  de  $P + Q$  (dans les cas où l'optimalité des bornes connues est incertaine). On se concentre dans cette partie sur le graphe biparti associé à  $S$  qu'on a déjà rencontré au lemme 4 : ses sommets sont  $P \cup Q$  et  $p$  et  $q$  sont reliés par une arête si  $p + q \in S$ . Une approche intéressante en théorie des graphes consiste à regarder si une famille de graphes admet un sous-graphe interdit dans le but d'obtenir des bornes sur le nombre d'arêtes des graphes de cette famille. Par exemple, les graphes dont les sous-graphes interdits sont les cycles sont exactement les arbres, et on peut borner leur nombre d'arêtes.

On suppose dans toute la suite que  $P$  et  $Q$  sont deux chaînes convexes du même type, et que  $S$  est également une chaîne du même type que  $P$  et  $Q$ . On note  $G$  le graphe associé. Il est facile de voir que  $G$  ne contient pas de cycle de longueur 4 : en effet, les points de  $P + Q$  associés à un cycle de longueur 4 forment un parallélogramme, qui ne peut jamais être un sous-ensemble d'une chaîne convexe. Mais ce sous-graphe interdit ne donne qu'une borne en  $\mathcal{O}(n^{3/2})$  et cette borne est connue pour être optimale [4]. Une idée naturelle est de voir si  $G$  peut contenir des cycles d'autres longueurs. Malheureusement, l'exemple de la figure 17 montre que  $G$  peut contenir un cycle de longueur 6. Une autre piste pourrait être de rechercher d'autres structures interdites plus complexes et d'étudier leurs influences sur le nombre d'arêtes de  $G$ .

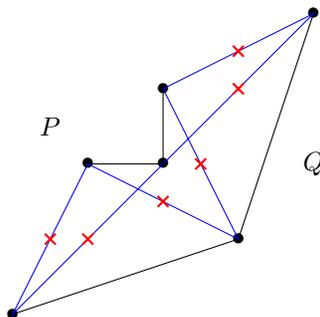


FIGURE 17 – Deux chaînes  $P$  et  $Q$  et un sous-ensemble convexe dont le graphe associé est le cycle de longueur 6.

On peut aussi représenter le graphe par sa matrice d'adjacence (qui est donc à coefficients dans  $\{0, 1\}$ ), et étudier le nombre maximal de 1 dans une telle matrice où certaines matrices extraites sont interdites. Cette méthode a été utilisée à de nombreuses reprises, par exemple dans [9] pour le problème des distances unitaires, dont je vais parler maintenant.

## 4.3 Lien avec le problème des distances unitaires

Soit  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  un ensemble de  $n$  points. On cherche le nombre maximal de paires de points de  $P$  dont la distance euclidienne vaut 1. Ce problème présente des similitudes étonnantes avec le problème du sous-ensemble maximal convexe de  $P + Q$ . En effet, les meilleures bornes supérieures connues sont également  $\mathcal{O}(n^{4/3})$  [17] et  $\mathcal{O}(n \log n)$  dans le cas où  $P$  est convexe [9] (cette preuve utilise l'argument matriciel évoqué précédemment).

Il est également facile de voir que toute borne pour le problème  $S \subseteq P + Q$  entraîne la même borne pour le problème des distances unitaires. En effet, à un ensemble de points  $P$ , l'ensemble des points de  $P + (-P)$  situés sur le cercle de centre  $O$  de rayon 1 est convexe par convexité du cercle, et correspond exactement l'ensemble des distances unitaires de  $P$ .

Un article très récent [15] semblait montrer qu'en réalité, on a une borne linéaire sur le nombre de distances unitaires de  $P$  si  $P$  est convexe. Vu la similitude des deux problèmes, nous nous sommes intéressés à cette preuve afin

de voir les arguments intéressants dans le but d'une adaptation à notre problème. L'idée générale est de construire, à partir du graphe associé à l'ensemble des distances unitaires et d'une propriété de type structure interdite, un autre graphe que l'on décompose en sous-graphes appelés modules, puis d'étudier le nombre d'arêtes et les relations entre ces modules. Hélas, dès la preuve de la structure interdite, des erreurs apparaissent sur des raisonnements de convexité. Nous avons essayé d'adapter cette construction à notre problème sur les sommes de Minkowski, et de voir si les erreurs du papier disparaissaient dans notre construction, mais sans résultat. L'approche était toutefois intéressante car toujours en lien avec des structures interdites dans la famille de graphe étudiée.

## 5 Conclusion

Durant ce stage j'ai travaillé autour du problème  $fg + 1$  sur deux axes principaux : une étude du processus d'onion peeling et une étude directe du problème en partant des preuves de résultats similaires sur des sommes de Minkowski (théorèmes 1 et 2).

Autour de l'onion peeling, j'ai établi des propriétés structurelles (théorèmes 3, 4, 5 et 6) concernant des cas où une borne linéaire sur la taille des couches était connue, ainsi qu'une borne dans le cas général (théorème 8) provenant elle aussi d'une propriété structurelle (lemme 1). Une manière de prolonger ce travail pourrait être de généraliser, comme j'ai essayé de le faire, ces propriétés structurelles à des cas plus généraux, ou d'en trouver d'autres, dans le but d'obtenir des bornes plus intéressantes.

Concernant le problème  $fg + 1$  en lui-même, le résultat le plus intéressant que j'ai obtenu est la borne linéaire du théorème 13 si l'ensemble des monômes d'un des deux polygones est convexe. Le cheminement de ma recherche ayant abouti à ce résultat a révélé différents arguments, utilisant des propriétés des chaînes convexes et la convexité des polygones. On a aussi vu comment utiliser ou adapter ces arguments pour des cadres plus généraux, par exemple la suppression d'un ou plusieurs points quelconques sur l'enveloppe convexe.

Des pistes pour progresser sur ce problème ont été évoquées dans la dernière partie : observer la structure des annulations de monômes, ou encore travailler sur le graphe associé à un sous-ensemble convexe de  $P + Q$ . Dans tous les problèmes mentionnés dans ce rapport, la recherche de bornes inférieures n'a pas du tout été abordée et mériterait qu'on s'y attarde. Par exemple, à ma connaissance, on ne sait pas construire de sous-ensemble convexe de  $P + Q$  ( $P$  et  $Q$  étant convexes) de taille  $\alpha \cdot n$ , avec  $\alpha > 2$ , et la meilleure borne inférieure sur le nombre de distances unitaires sur un polygone convexe est de  $2n - 7$  [7]. Cette difficulté à trouver des contre-exemples de taille raisonnable semble conforter notre hypothèse d'existence d'une borne linéaire pour ces problèmes.

## Références

- [1] Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, and Mark Overmars. *Computational Geometry : Algorithms and Applications*. Springer-Verlag TELOS, Santa Clara, CA, USA, 3rd ed. edition, 2008.
- [2] Thorsten Bernholt, Friedrich Eisenbrand, and Thomas Hofmeister. Constrained Minkowski sums : A geometric framework for solving interval problems in computational biology efficiently. *Discrete & Computational Geometry*, 42(1) :22–36, 2009.
- [3] Ondrej Bílka, Kevin Buchin, Radoslav Fulek, Masashi Kiyomi, Yoshio Okamoto, Shin-ichi Tanigawa, and Csaba D. Tóth. A tight lower bound for convexly independent subsets of the Minkowski sums of planar point sets. *Electr. J. Comb.*, 17(1), 2010.
- [4] Béla Bollobas. *Extremal Graph Theory*. Dover Publications, Incorporated, 2004.
- [5] Bernard Chazelle. On the convex layers of a planar set. *IEEE Trans. Inf. Theor.*, 31(4) :509–517, July 1985.
- [6] Ketan Dalal. Counting the onion. *Random Struct. Algorithms*, 24(2) :155–165, March 2004.
- [7] Herbert Edelsbrunner. A Lower Bound on the Number of Unit Distances between the Vertices of a Convex Polygon. *Journal of Combinatorial Theory*, 56 :312–316, 1991.
- [8] Friedrich Eisenbrand, János Pach, Thomas Rothvoß, and Nir B. Sopher. Convexly independent subsets of the Minkowski sum of planar point sets. *Electronic Journal of Combinatorics*, 15, 2008.
- [9] Zoltán Füredi. The Maximum Number of Unit Distances in a Convex  $n$ -gon. *J. Comb. Theory Ser. A*, 55(2) :316–320, October 1990.
- [10] Shuhong Gao. Absolute Irreducibility of Polynomials via Newton Polytopes. *Journal of Algebra*, 237(2) :501–520, 1999.
- [11] Ignacio García-Marco and Kolja Knauer. Drawing graphs with vertices and edges in convex position. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 58(C) :25–33, October 2016.
- [12] Sathish Govindarajan and Abhijeet Khopkar. On Locally Gabriel Geometric Graphs. *Graphs and Combinatorics*, 31(5) :1437–1452, September 2015.
- [13] Nir Halman, Shmuel Onn, and Uriel G. Rothblum. The convex dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 155 :1373–1383, March 2007.
- [14] Sarel Har-Peled and Bernard Lidický. Peeling the grid. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 27(2) :650–655, 2013.
- [15] Abhijeet Khopkar. Edge complexty of geometric graphs on convex independent point sets. April 2017.
- [16] Pascal Koiran, Natacha Portier, Sébastien Tavenas, and Stéphan Thomassé. A  $\tau$ -Conjecture for Newton Polygons. *Fondations of Computational Mathematics*, 15(1) :185–197, 2015.
- [17] Joel Spencer, Endre Szemerédi, and William T. Trotter. Unit distances in the euclidean plane. *Academic Press*, pages 293–308, 1984.
- [18] Hans Raj Tiwary. On the largest convex subsets in Minkowski sums. *Information Processing Letters*, 114(8) :405–407, August 2014.