

Polygones de Newton, Onion Peeling et Problème $fg + 1$

William Aufort

19 Juin 2017



Plan

- 1 Introduction
- 2 Le problème $fg + 1$
- 3 Un peu d'Onion Peeling
- 4 Conclusion

Plan

1 Introduction

2 Le problème $fg + 1$

3 Un peu d'Onion Peeling

4 Conclusion

Motivations : le mystère $fg + 1$

- Au départ, une conjecture sur le nombre de racines réelles d'un polynôme creux :

$$f(X) = \sum_{i=1}^p \prod_{j=1}^q f_{i,j}(X)$$

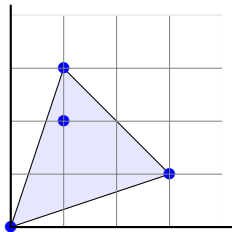
- Motivation : la règle des signes de Descartes donne une borne pour un polynôme avec t monômes.
- On comprend fg , mais $fg + 1$ est déjà un mystère...
- Ici : on va étudier un problème similaire sur des polygones

Racines réelles $\iff$ Points de l'enveloppe convexe

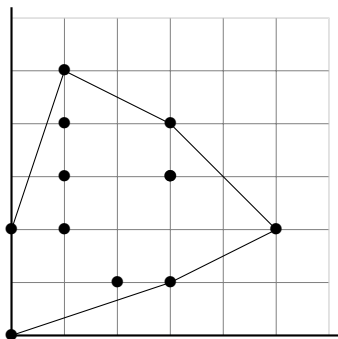
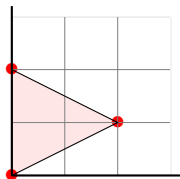
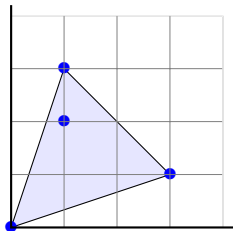
- Un corollaire : séparation des classes VP et VNP
 $\implies$ un problème intéressant

Polygone de Newton

- Soit $f(X, Y) = \sum_i \alpha_i X^{a_i} Y^{b_i}$
- Monômes de f : $\text{Mon}(f) = \{(a_i, b_i), \alpha_i \neq 0\}$
- Polygone de Newton : $\text{Newt}(f) = \text{Conv}(\text{Mon}(f))$
- Exemple : $f(X, Y) = 1 + 2X^3Y + XY^2 + XY^3$

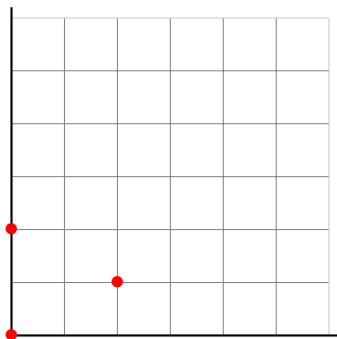
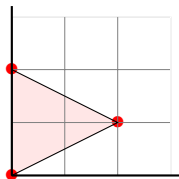
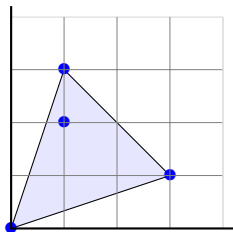


Lien avec les sommes de Minkowski



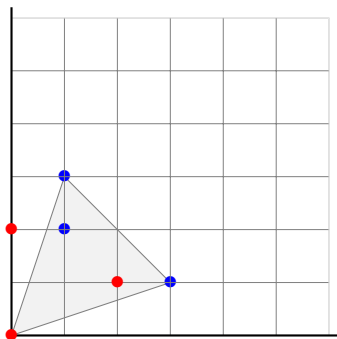
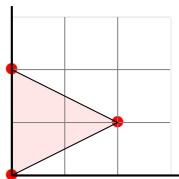
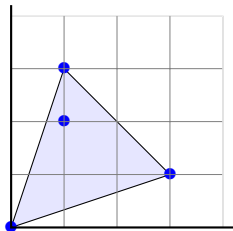
- $f(X, Y) = 1 + X^3Y + XY^2 + XY^3$ et $g(X, Y) = 1 + X^2Y + Y^2$
- $(fg)(X, Y) = 1 + Y^2 + XY^2 + XY^3 + XY^4 + XY^5 + X^2Y + X^3Y + 2X^3Y^3 + X^3Y^4 + X^5Y^2$

Lien avec les sommes de Minkowski



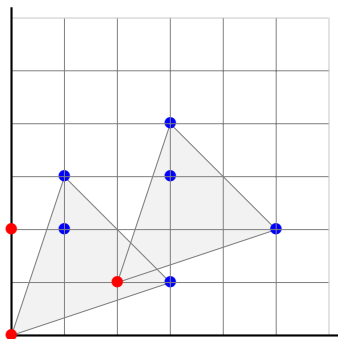
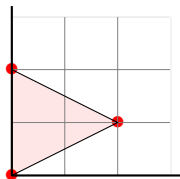
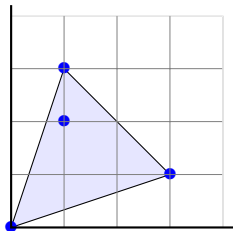
- $f(X, Y) = 1 + X^3Y + XY^2 + XY^3$ et $g(X, Y) = 1 + X^2Y + Y^2$
- $(fg)(X, Y) = 1 + Y^2 + XY^2 + XY^3 + XY^4 + XY^5 + X^2Y + X^3Y + 2X^3Y^3 + X^3Y^4 + X^5Y^2$

Lien avec les sommes de Minkowski



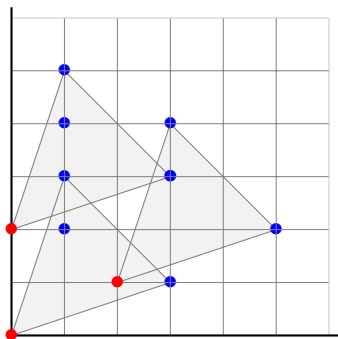
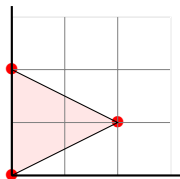
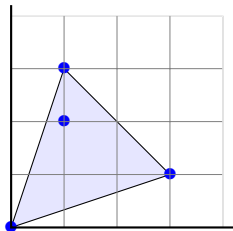
- $f(X, Y) = 1 + X^3Y + XY^2 + XY^3$ et $g(X, Y) = 1 + X^2Y + Y^2$
- $(fg)(X, Y) = 1 + Y^2 + XY^2 + XY^3 + XY^4 + XY^5 + X^2Y + X^3Y + 2X^3Y^3 + X^3Y^4 + X^5Y^2$

Lien avec les sommes de Minkowski



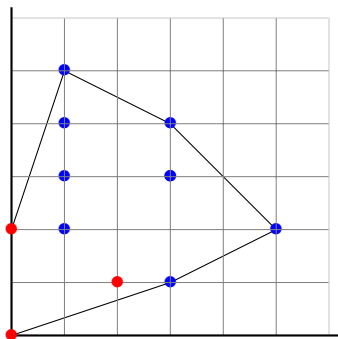
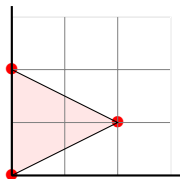
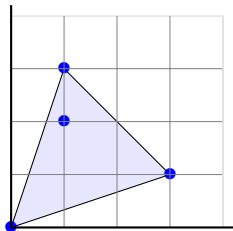
- $f(X, Y) = 1 + X^3Y + XY^2 + XY^3$ et $g(X, Y) = 1 + X^2Y + Y^2$
- $(fg)(X, Y) = 1 + Y^2 + XY^2 + XY^3 + XY^4 + XY^5 + X^2Y + X^3Y + 2X^3Y^3 + X^3Y^4 + X^5Y^2$

Lien avec les sommes de Minkowski



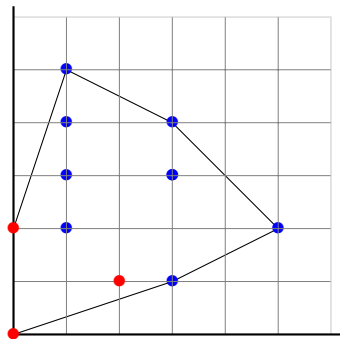
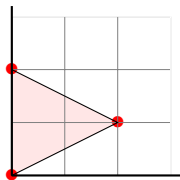
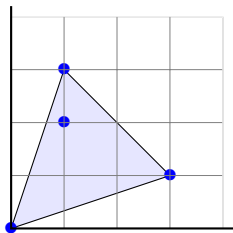
- $f(X, Y) = 1 + X^3Y + XY^2 + XY^3$ et $g(X, Y) = 1 + X^2Y + Y^2$
- $(fg)(X, Y) = 1 + Y^2 + XY^2 + XY^3 + XY^4 + XY^5 + X^2Y + X^3Y + 2X^3Y^3 + X^3Y^4 + X^5Y^2$

Lien avec les sommes de Minkowski



- $f(X, Y) = 1 + X^3Y + XY^2 + XY^3$ et $g(X, Y) = 1 + X^2Y + Y^2$
- $(fg)(X, Y) = 1 + Y^2 + XY^2 + XY^3 + XY^4 + XY^5 + X^2Y + X^3Y + 2X^3Y^3 + X^3Y^4 + X^5Y^2$

Lien avec les sommes de Minkowski



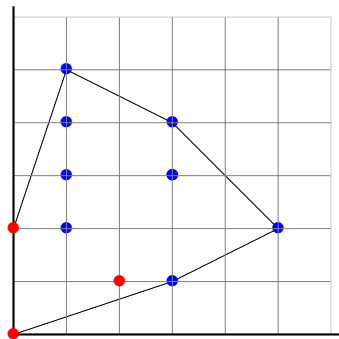
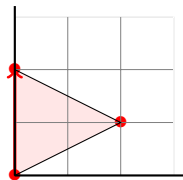
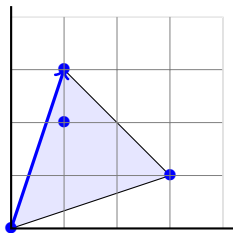
- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Lien avec les sommes de Minkowski



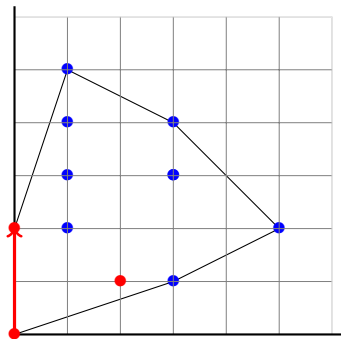
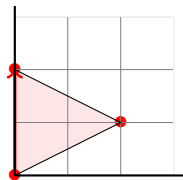
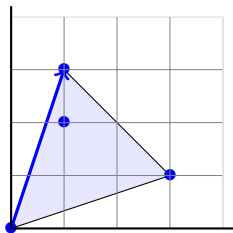
- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Lien avec les sommes de Minkowski



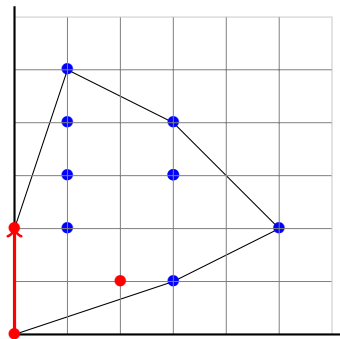
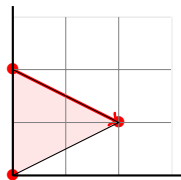
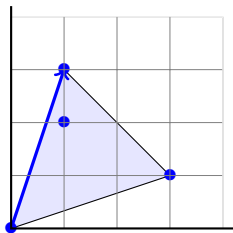
- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Lien avec les sommes de Minkowski



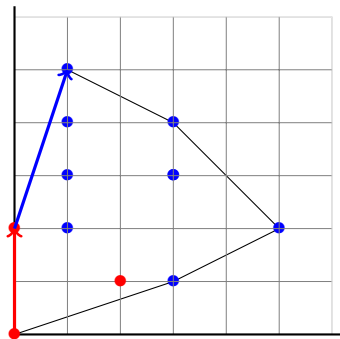
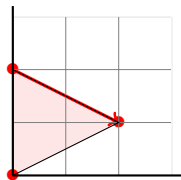
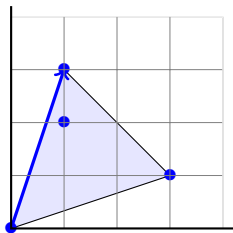
- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Lien avec les sommes de Minkowski



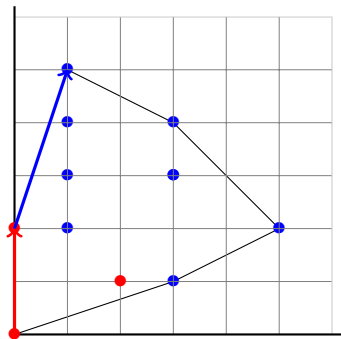
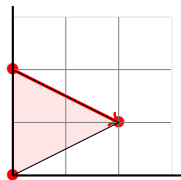
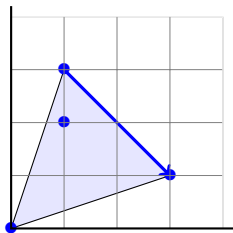
- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Lien avec les sommes de Minkowski



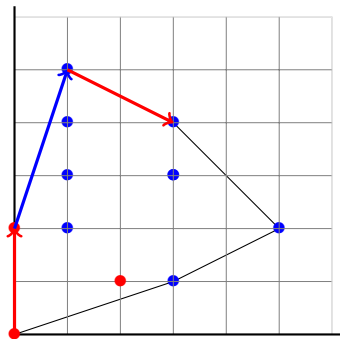
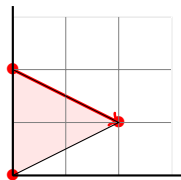
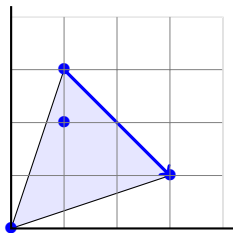
- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Lien avec les sommes de Minkowski



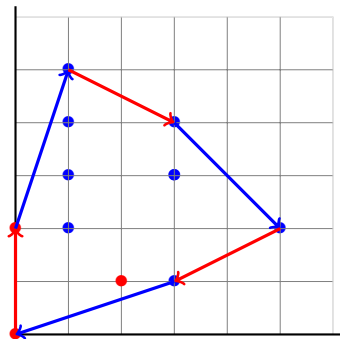
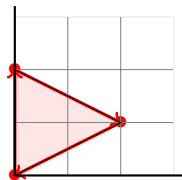
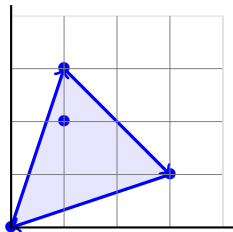
- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Lien avec les sommes de Minkowski



- $P + Q = \{p + q, p \in P, q \in Q\}$

Lemme (Ostrowski)

$$\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$$

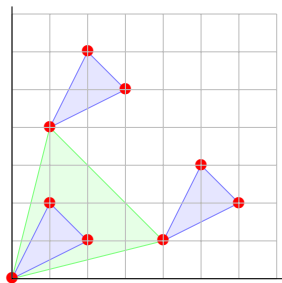
- On peut construire les arêtes de $P + Q$ à partir de celles de P et de Q

Problème $fg + 1$

- $\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$
- Si f et g ont t monômes, alors $\text{Newt}(fg)$ a au plus $2t$ arêtes
- Et si on regarde $\text{Newt}(fg+1)$

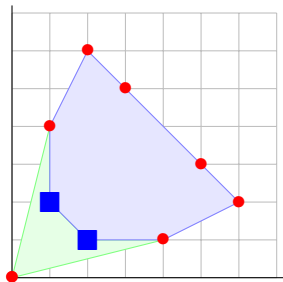
Problème $fg + 1$

- $\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$
- Si f et g ont t monômes, alors $\text{Newt}(fg)$ a au plus $2t$ arêtes
- Et si on regarde $\text{Newt}(fg+1) \Rightarrow$ **Annulations**
- Ex : $f(X, Y) = -1 + X^2Y + XY^2$ et $g(X, Y) = 1 + X^4Y + XY^4$



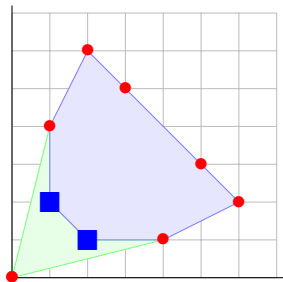
Problème $fg + 1$

- $\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$
- Si f et g ont t monômes, alors $\text{Newt}(fg)$ a au plus $2t$ arêtes
- Et si on regarde $\text{Newt}(fg+1) \Rightarrow$ Annulations
- Ex : $f(X, Y) = -1 + X^2Y + XY^2$ et $g(X, Y) = 1 + X^4Y + XY^4$



Problème $fg + 1$

- $\text{Newt}(fg) = \text{Newt}(f) + \text{Newt}(g)$
- Si f et g ont t monômes, alors $\text{Newt}(fg)$ a au plus $2t$ arêtes
- Et si on regarde $\text{Newt}(fg+1) \Rightarrow$ **Annulations**
- Ex : $f(X, Y) = -1 + X^2Y + XY^2$ et $g(X, Y) = 1 + X^4Y + XY^4$



Borne triviale : t^2

Meilleure borne : $\mathcal{O}(t^{4/3})$

On espère une borne linéaire...

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le problème $fg + 1$
- 3 Un peu d'Onion Peeling
- 4 Conclusion

Aperçu

- Rappel : la meilleure borne est en $\mathcal{O}(n^{4/3})$
- On se concentre sur le cas d'une vraie annulation (coefficient constant de f_g égal à -1)

Aperçu

- Rappel : la meilleure borne est en $\mathcal{O}(n^{4/3})$
- On se concentre sur le cas d'une vraie annulation (coefficient constant de fg égal à -1)
- Idée principale : on décompose $P = \text{Mon}(f)$, $Q = \text{Mon}(g)$, et l'ensemble des nouveaux points du polygone de Newton, puis on étudie les différentes « contributions »
- On va utiliser le résultat suivant :

Théorème (García-Marco, Knauer)

Si P est convexe et $S \subseteq P + P$ est convexe, alors $|S| \leq 2|P|$

Aperçu

- Rappel : la meilleure borne est en $\mathcal{O}(n^{4/3})$
- On se concentre sur le cas d'une vraie annulation (coefficient constant de fg égal à -1)
- Idée principale : on décompose $P = \text{Mon}(f)$, $Q = \text{Mon}(g)$, et l'ensemble des nouveaux points du polygone de Newton, puis on étudie les différentes « contributions »
- On va utiliser le résultat suivant :

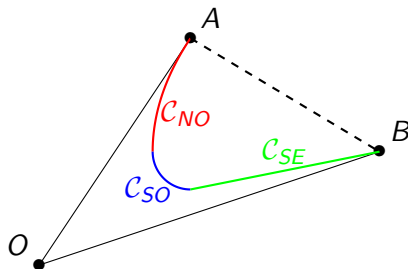
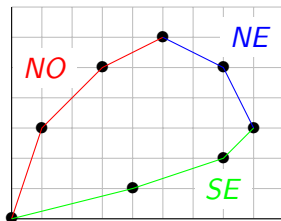
Théorème (García-Marco, Knauer)

Si P est convexe et $S \subseteq P + P$ est convexe, alors $|S| \leq 2|P|$

- Supposons tout d'abord que P et Q sont convexes

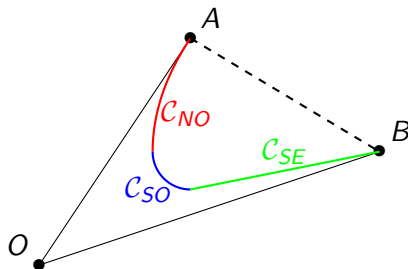
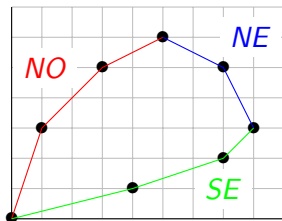
Première étape : de la structure !

- On décompose P et Q en chaînes convexes : P_{NO} , P_{SE} , etc.



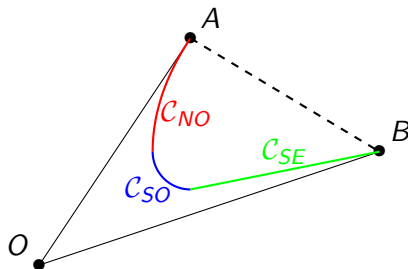
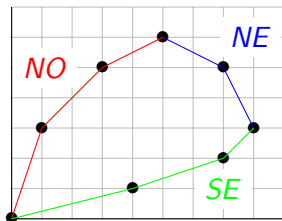
Première étape : de la structure !

- On décompose P et Q en chaînes convexes : P_{NO} , P_{SE} , etc.
- Quand on supprime l'origine, des nouveaux points apparaissent
 $\Rightarrow$ forment un ensemble $\mathcal{C}$ qui a aussi de la structure



Première étape : de la structure !

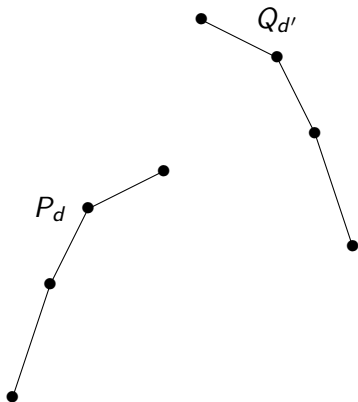
- On décompose P et Q en chaînes convexes : P_{NO} , P_{SE} , etc.
- Quand on supprime l'origine, des nouveaux points apparaissent
 $\Rightarrow$ forment un ensemble $\mathcal{C}$ qui a aussi de la structure
- Objectif : borner les $|(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}_{d''}|$ séparément
 $\Rightarrow$ différents arguments



Argument 1 : argument « $P + P$ convexe »

Lemme

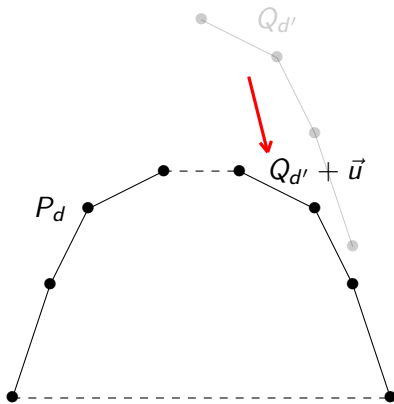
Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}| \leq 2(|P_d| + |Q_{d'}|)$



Argument 1 : argument « $P + P$ convexe »

Lemme

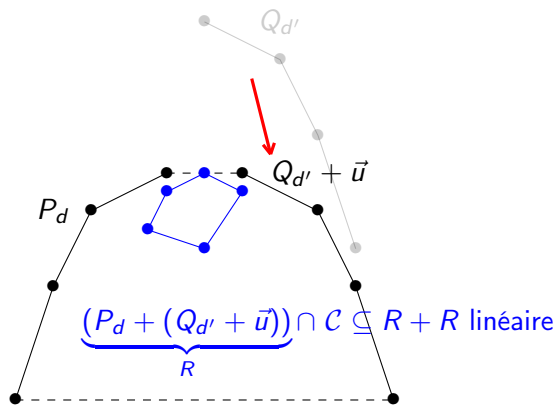
Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}| \leq 2(|P_d| + |Q_{d'}|)$



Argument 1 : argument « $P + P$ convexe »

Lemme

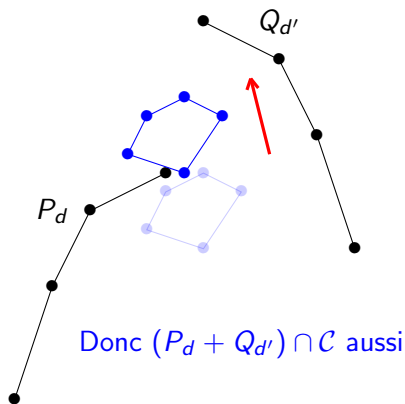
Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}| \leq 2(|P_d| + |Q_{d'}|)$



Argument 1 : argument « $P + P$ convexe »

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}| \leq 2(|P_d| + |Q_{d'}|)$



Donc $(P_d + Q_{d'}) \cap \mathcal{C}$ aussi

Argument 2 : argument de chaînes

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$

Argument 2 : argument de chaînes

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$

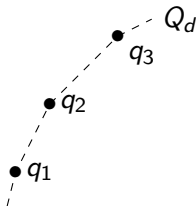
- On forme le graphe $G = (V, E)$ où $V = P_d \cup Q_d$ et $(p, q) \in E \Leftrightarrow p + q \in \mathcal{C}_{d'}$
- Si p a trois voisins q_1, q_2 et q_3 , ils forment une chaîne ...

Argument 2 : argument de chaînes

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$

- On forme le graphe $G = (V, E)$ où $V = P_d \cup Q_d$ et $(p, q) \in E \Leftrightarrow p + q \in \mathcal{C}_{d'}$
- Si p a trois voisins q_1, q_2 et q_3 , ils forment une chaîne ...



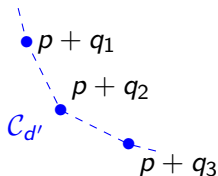
- de type d car $q_i \in Q_d$

Argument 2 : argument de chaînes

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$

- On forme le graphe $G = (V, E)$ où $V = P_d \cup Q_d$ et $(p, q) \in E \Leftrightarrow p + q \in \mathcal{C}_{d'}$
- Si p a trois voisins q_1, q_2 et q_3 , ils forment une chaîne ...



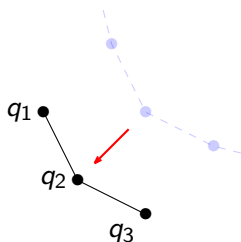
- de type d car $q_i \in Q_d$
- de type d' car translatés d'une sous-chaîne de $\mathcal{C}_{d'}$

Argument 2 : argument de chaînes

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$

- On forme le graphe $G = (V, E)$ où $V = P_d \cup Q_d$ et $(p, q) \in E \Leftrightarrow p + q \in \mathcal{C}_{d'}$
- Si p a trois voisins q_1, q_2 et q_3 , ils forment une chaîne ...



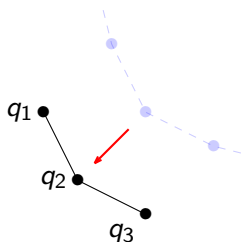
- de type d car $q_i \in Q_d$
- de type d' car translatés d'une sous-chaîne de $\mathcal{C}_{d'}$

Argument 2 : argument de chaînes

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$

- On forme le graphe $G = (V, E)$ où $V = P_d \cup Q_d$ et $(p, q) \in E \Leftrightarrow p + q \in \mathcal{C}_{d'}$
- Si p a trois voisins q_1, q_2 et q_3 , ils forment une chaîne ...



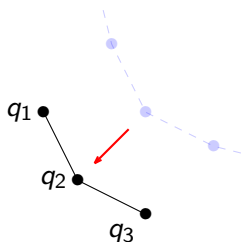
- de type d car $q_i \in Q_d$
- de type d' car translatés d'une sous-chaîne de $\mathcal{C}_{d'}$
- Contradiction car $d \neq d'$

Argument 2 : argument de chaînes

Lemme

Si $d \neq d'$, alors $|(P_d + Q_d) \cap \mathcal{C}_{d'}| \leq |P_d| + |Q_d|$

- On forme le graphe $G = (V, E)$ où $V = P_d \cup Q_d$ et $(p, q) \in E \Leftrightarrow p + q \in \mathcal{C}_{d'}$
- Si p a trois voisins q_1, q_2 et q_3 , ils forment une chaîne ...



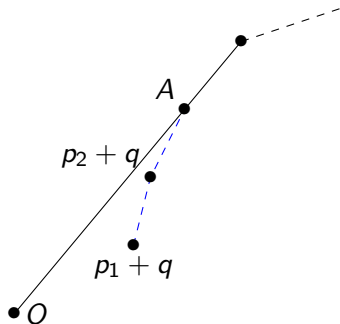
- de type d car $q_i \in Q_d$
- de type d' car translatés d'une sous-chaîne de $\mathcal{C}_{d'}$
- Contradiction car $d \neq d'$

- Note : on peut remplacer P_d par P , ou Q_d par Q , dans cette preuve

Argument 3 : argument des pentes

Lemme

$$|(P_d + Q) \cap \mathcal{C}_d| \leq |Q| \text{ (} Q \text{ non nécessairement convexe)}$$

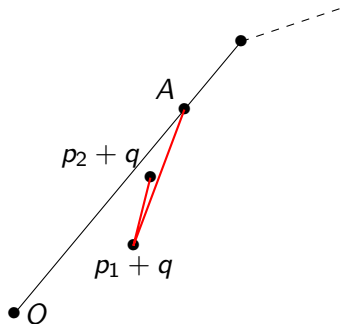


- On reforme le graphe G .
- Si q a deux voisins p_1 et p_2 ...

Argument 3 : argument des pentes

Lemme

$$|(P_d + Q) \cap \mathcal{C}_d| \leq |Q| \text{ (} Q \text{ non nécessairement convexe)}$$

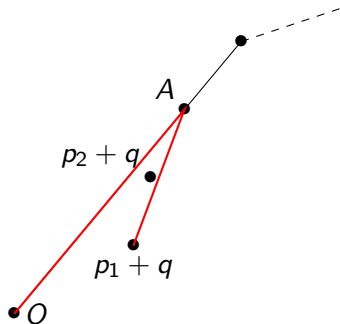


- On reforme le graphe G .
- Si q a deux voisins p_1 et p_2 ...
- $\text{pente}(p_1, p_2) > \text{pente}(p_1 + q, A)$

Argument 3 : argument des pentes

Lemme

$$|(P_d + Q) \cap \mathcal{C}_d| \leq |Q| \text{ (} Q \text{ non nécessairement convexe)}$$

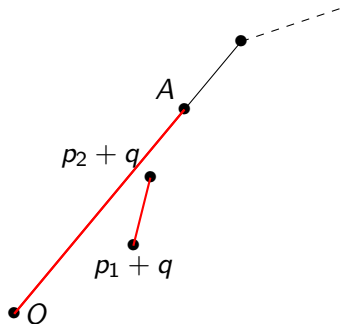


- On reforme le graphe G .
- Si q a deux voisins p_1 et p_2 ...
- $\text{pente}(p_1, p_2) > \text{pente}(p_1 + q, A)$
- $\text{pente}(p_1 + q, A) > \text{pente}(O, A)$

Argument 3 : argument des pentes

Lemme

$$|(P_d + Q) \cap \mathcal{C}_d| \leq |Q| \text{ (} Q \text{ non nécessairement convexe)}$$

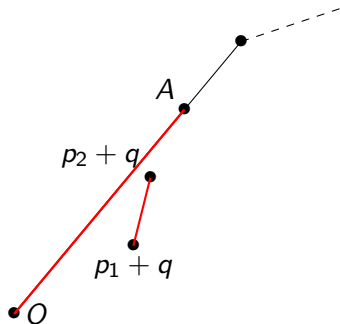


- On reforme le graphe G .
- Si q a deux voisins p_1 et p_2 ...
- $\text{pente}(p_1, p_2) > \text{pente}(p_1 + q, A)$
- $\text{pente}(p_1 + q, A) > \text{pente}(O, A)$
- $\text{pente}(O, A) \geq \text{pente}(p_1, p_2)$
- Contradiction

Argument 3 : argument des pentes

Lemme

$|(P_d + Q) \cap \mathcal{C}_d| \leq |Q|$ (Q non nécessairement convexe)



- On reforme le graphe G .
- Si q a deux voisins p_1 et p_2 ...
- $\text{pente}(p_1, p_2) > \text{pente}(p_1 + q, A)$
- $\text{pente}(p_1 + q, A) > \text{pente}(O, A)$
- $\text{pente}(O, A) \geq \text{pente}(p_1, p_2)$
- Contradiction

Théorème

Si $\text{Mon}(f)$ et $\text{Mon}(g)$ sont convexes, alors $|\text{Newt}(fg + 1)|$ est linéaire

Généralisations

- P convexe : on réutilise les arguments 2 et 3

Généralisations

- P convexe : on réutilise les arguments 2 et 3
- P et Q faiblement convexes : redéfinir A et B , même arguments

Généralisations

- P convexe : on réutilise les arguments 2 et 3
- P et Q faiblement convexes : redéfinir A et B , même arguments
- $\text{Newt}(fg + c \cdot x^\alpha y^\beta)$: plusieurs cas selon la position de (α, β) , même arguments

Généralisations

- P convexe : on réutilise les arguments 2 et 3
- P et Q faiblement convexes : redéfinir A et B , même arguments
- $\text{Newt}(fg + c \cdot x^\alpha y^\beta)$: plusieurs cas selon la position de (α, β) , même arguments

Théorème

Dans tous les cas précédents, le polygone de Newton du polynôme étudié a une taille linéaire

Généralisations

- P convexe : on réutilise les arguments 2 et 3
- P et Q faiblement convexes : redéfinir A et B , même arguments
- $\text{Newt}(fg + c \cdot x^\alpha y^\beta)$: plusieurs cas selon la position de (α, β) , même arguments

Théorème

Dans tous les cas précédents, le polygone de Newton du polynôme étudié a une taille linéaire

- Suppressions de $k \geq 2$ points :
 - ▶ non consécutifs : $\mathcal{O}(n \cdot k)$
 - ▶ consécutifs : $\mathcal{O}(n + k \log k)$

Généralisations

- P convexe : on réutilise les arguments 2 et 3
- P et Q faiblement convexes : redéfinir A et B , même arguments
- $\text{Newt}(fg + c \cdot x^\alpha y^\beta)$: plusieurs cas selon la position de (α, β) , même arguments

Théorème

Dans tous les cas précédents, le polygone de Newton du polynôme étudié a une taille linéaire

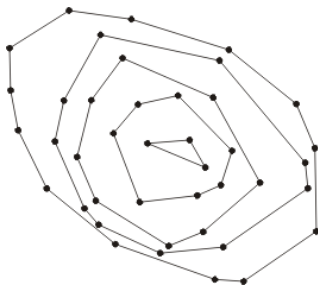
- Suppressions de $k \geq 2$ points :
 - ▶ non consécutifs : $\mathcal{O}(n \cdot k)$
 - ▶ consécutifs : $\mathcal{O}(n + k \log k)$
- Si f et g sont quelconques (k couches), on obtient une borne en $\mathcal{O}(k \cdot n \log n)$ en décomposant les différentes couches en chaînes convexes

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le problème $fg + 1$
- 3 Un peu d'Onion Peeling
- 4 Conclusion

Onion Peeling

Décomposer en ensemble de « couches »



Objectifs : Dans le cas $P + Q$: taille des couches, nombre de couches ou de manière générale, des propriétés structurales

Résultats : cas P et Q convexes

- Pour $P + P$
 - ▶ Notion naturelle de distance entre deux points d'un polygône convexe

Résultats : cas P et Q convexes

- Pour $P + P$
 - ▶ Notion naturelle de distance entre deux points d'un polygône convexe
 - ▶ Si P est régulier, correspondance distance/couche (également une borne sur le nombre de couches de $P + P + P$)
 - ▶ Si P est quelconque, plus une correspondance mais tout de même : la somme de deux points à distance i est au moins sur la $(i + 1)$ -ième couche

Résultats : cas P et Q convexes

- Pour $P + P$

- ▶ Notion naturelle de distance entre deux points d'un polygône convexe
- ▶ Si P est régulier, correspondance distance/couche (également une borne sur le nombre de couches de $P + P + P$)
- ▶ Si P est quelconque, plus une correspondance mais tout de même : la somme de deux points à distance i est au moins sur la $(i + 1)$ -ième couche
- ▶ Mais pas de bornes intéressantes

Résultats : cas P et Q convexes

- Pour $P + P$
 - ▶ Notion naturelle de distance entre deux points d'un polygône convexe
 - ▶ Si P est régulier, correspondance distance/couche (également une borne sur le nombre de couches de $P + P + P$)
 - ▶ Si P est quelconque, plus une correspondance mais tout de même : la somme de deux points à distance i est au moins sur la $(i + 1)$ -ième couche
 - ▶ Mais pas de bornes intéressantes
- Pour $P + Q$, pas de distance convenable trouvée/prouvée
- Si P et Q sont quelconques, on a une borne $\mathcal{O}(k \cdot n \log n)$ en reliant les couches de P , Q et $P + Q$

Plan

- 1 Introduction
- 2 Le problème $fg + 1$
- 3 Un peu d'Onion Peeling
- 4 Conclusion

Conclusion

- Sur le problème $fg + 1$: meilleure borne linéaire, quand l'un des ensembles de monômes est convexe.
- Première généralisation à regarder : si P et Q ont deux couches
Ce qui pose problème : $(P_{NO,2} + Q_{NO,2}) \cap \mathcal{C}_{NO}$
- Des bornes inférieures ? Même $\alpha \cdot n$, avec $\alpha > 2...$

Questions ?

