

# Mécanique analytique.

## 1 Lois de Newton.

### 1.1 Dynamique d'une particule ponctuelle.

**Loi fondamentale de la dynamique**, deuxième loi de Newton : Une particule  $a$ , à chaque instant, une accélération  $\gamma$  proportionnel à la résultante  $\vec{F}$  des forces qui s'exercent sur elle.

$$\vec{F} = m \vec{\gamma}$$

où  $m$  est appelée la masse inerte de la particule considérée.

On appelle **repère galiléen** tout repère dans lequel cette loi est valable.

### 1.2 Système de particules ponctuelles.

Pour un système de particules, on applique cette relation à chaque particule.

**Principe d'égalité de l'action et de la réaction** : La force exercée par une particule  $i$  sur une particule  $j$  est la même que celle exercée par  $j$  sur  $i$ .

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = \vec{F}_{B \rightarrow A}$$

Si les forces dérivent d'un potentiel  $V$ , on écrit

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = -\vec{\nabla}_i V$$

avec  $\vec{\nabla}_i$  le gradient par rapport aux coordonnées  $\vec{r}_i$  de la particule  $i$  du système à  $N$  particules et où

$$V = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r}_i) + \sum_{i < j} V_{ij}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

$V_{ij}$  correspondant au potentiel d'interaction intérieure entre particule  $i$  et  $j$  du système et  $V_i$  est le potentiel dont dérive le champ de forces extérieures.

### 1.3 Théorèmes fondamentaux.

Le **centre de masse** ou **centre de gravité** d'un système est donné par ses coordonnées  $\vec{r}_G$  telles que

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i}$$

L'énergie cinétique totale est définie par

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)^2$$

Le **moment cinétique**  $\vec{l}$  par rapport à l'origine est

$$\vec{l} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

Le centre de masse se déplace comme le ferait une particule ponctuelle dont la masse serait la masse totale du système et sur laquelle agirait la résultante de toutes les forces intervenant dans le système.

$$\frac{d^2 \vec{r}_G}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique pris en un point fixe est égale à la résultante des moments des forces par rapport à ce point.

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i$$

La variation de l'énergie cinétique entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est égale au travail fourni par l'ensemble des forces au cours du mouvement entre ces deux instants.

$$T(t_1) - T(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} dt$$

## 2 Principe de moindre action.

Soit un système matériel décrit par  $N$  coordonnées généralisées  $q_i$  d'un point  $Q$  fictif dans un espace euclidien  $R_N$  à  $N$  dimensions. On appelle  $Q(t)$  le mouvement dans cet espace de toutes les composantes  $q_i(t)$  décrivant le système au cours du temps.  $Q(t)$  est donc une courbe dans un espace à  $N + 1$  dimensions ( $N$  dimensions d'espace et une de temps).

On appelle **chemin d'espace-temps** entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  la courbe qui relie les points  $Q(t_1)$  et  $Q(t_2)$ .

On pose alors la fonction  $\mathcal{L}$  comme une fonction de toutes les coordonnées généralisées<sup>1</sup> du système<sup>2</sup>

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, \dots, q_N ; d_t q_1, d_t q_2, \dots, d_t q_N ; t) \equiv \mathcal{L}(Q, d_t Q ; t)$$

On définit alors l'**action**  $S_r$  comme l'intégrale sur le chemin d'espace temps de la fonction  $\mathcal{L}$ .

$$S_r = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(Q, d_t Q ; t) dt$$

On peut alors énoncer le **principe de moindre action** comme suit : de tous les chemins d'espace temps joignant  $Q(t_1)$  et  $Q(t_2)$ , celui qui est effectivement suivi est celui qui minimise l'action.

## 3 Fonction de Lagrange et équations de Lagrange.

On considère un autre chemin infiniment proche de celui reliant  $Q(t_1)$  et  $Q(t_2)$ , les coordonnées généralisées de ce chemin valent, pour chaque particule du système

$$q'_i(t) = q_i(t) + \delta q_i(t)$$

On calcule la variation de l'action entre les deux chemins

$$\begin{aligned} \delta S_r &= \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(\delta q_1, \dots, \delta q_N ; \delta(d_t q_1), \dots, \delta(d_t q_N) ; t) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^N d_t q_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [d_t q_i]} \right) \end{aligned}$$

on obtient après quelques calculs, où l'on remarque que  $\delta(d_t q_i(t)) = d_t(\delta q_i(t))$ , l'accroissement

$$\delta S_r = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N \delta q_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [d_t q_i]} \right]$$

Or on remarque que  $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$  puisque les chemins ont même origine et même condition finale. Il faut donc

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [d_t q_i]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$$

C'est l'**équation de Lagrange** qui permet de caractériser le mouvement de systèmes complexes sans soucis de la paramétrisation du problème. En effet, on constate que les équations du mouvement s'écrivent toujours sous la forme des équations de Lagrange, quel que soit le système de coordonnées  $q_i$  choisie (également vraie pour des coordonnées non cartésiennes). D'où le nom de **coordonnées généralisées** pour désigner les  $q_i$ .

On appelle alors **fonction de Lagrange** la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\vec{r}_i, d_t \vec{r}_i) &= T - V \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (d_t \vec{r}_i)^2 - V(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

Il convient de connaître l'écriture

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N d_t q_i \frac{\partial}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^N d_t^2 q_i \frac{\partial}{\partial [d_t q_i]}$$

appelée dérivée totale par rapport au temps.

<sup>1</sup>L'explication du terme **coordonnées généralisées** viendra plus tard.

<sup>2</sup>On note pour une fonction  $f(t)$  dérivable deux fois :

$$\begin{aligned} d_t f &= \frac{df}{dt} = f'(t) \\ d_t^2 f &= \frac{d^2 f}{dt^2} = f''(t) \end{aligned}$$

## 4 Fonction de Hamilton et équations canoniques.

Le formalisme de Lagrange peut toutefois être simplifier et on utilise plus généralement le formalisme de Hamilton qui permet de passer des  $N$  équations du deuxième ordre de Lagrange à  $2N$  équations du premier ordre dans le formalisme hamiltonien.

On appelle  $p_i$  le **moment conjugué** (ou **impulsion généralisé**) de la coordonnée généralisée  $q_i$ .

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [d_t q_i]}$$

Si les forces dérivent d'une énergie potentielle, on retrouve

$$\vec{p}_i = m_i \cdot d_t \vec{r}_i$$

On définit alors le **hamiltonien** (ou **fonction de Hamilton**) du système comme

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q_i, p_i ; t) &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot d_t q_i - \mathcal{L} \\ &= \sum_{i=1}^N p_i \cdot d_t q_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \cdot (d_t \vec{r}_i)^2 + V(\vec{r}_i) \end{aligned}$$

La différentielle totale du hamiltonien est

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

Les **équations du mouvement** sont donc dans le formalisme de Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Expression du hamiltonien en fonction des variables  $\vec{p}_i$  et  $\vec{r}_i$  :

$$\mathcal{H}(\vec{p}_i, \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} + V(\vec{r}_i)$$

Le hamiltonien est alors constamment égal à l'énergie totale du système, les **équations canoniques** sont alors équivalentes aux équations de Newton.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_i}{dt} &= \frac{\vec{p}_i}{m_i} \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= -\vec{\nabla}_i V \end{aligned}$$

## 5 Exemples d'application du formalisme hamiltonien.

### 5.1 Particule dans un potentiel central.

Particule de masse  $m$  en coordonnées polaires  $(r, \theta, \varphi)$  soumise à un potentiel ne dépendant que de  $r$ , noté  $V(r)$ . Le hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}(r, \theta, \varphi; p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} \vec{l}^2 + V(r)$$

avec le moment cinétique

$$\vec{l}^2 = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}$$

Si le moment cinétique initial de la particule est  $\vec{l}_0$ , et si le moment cinétique reste constant, tout se passe comme si l'on avait une particule de masse  $m$  évoluant à une dimension dans le potentiel effectif

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\vec{l}_0^2}{2mr^2}$$

### 5.2 Particule chargée dans un champ électromagnétique.

L'ensemble des deux potentiels  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  et  $U(\vec{r}, t)$  vérifiant<sup>3</sup>

$$\vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} U(\vec{r}, t)$$

constitue une **jauge** décrivant le champ électromagnétique

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}, t) \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\vec{\nabla} U(\vec{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Dans le champs électromagnétique, la particule chargée est soumise à la force de Lorentz, lui conférant la vitesse  $\vec{v}$

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

La loi de Newton nous donne

$$m \cdot d_t^2 \vec{r} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + d_t \vec{r} \wedge \vec{B}(\vec{r}, t) \right]$$

<sup>3</sup>On a bien sûr par définition du potentiel vecteur  $\vec{A}$  dont dérive le champ magnétique  $\vec{B}$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Entrainant le lagrangien

$$\mathcal{L}(\vec{r}, d_t \vec{r}, t) = \frac{1}{2} m. (d_t \vec{r})^2 + q \left( d_t \vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) \right) - qU(\vec{r}, t)$$

Enfin, le hamiltonien s'écrit

$$\mathcal{H}(\vec{r}, \vec{p}; t) = \frac{1}{2m} \left[ \vec{p} - q \vec{A}(\vec{r}, t) \right]^2 + qU(\vec{r}, t)$$