

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

L3 SCIENCES DE LA MATIÈRE

**Mécanique Analytique
et
Relativité Restreinte**

Auteur :
Yannick BERTRAND

Professeur :
Henning SAMTLEBEN

Table des matières

1	Mécanique newtonienne	5
1.1	Rappel : les lois de Newton	5
1.2	Inconvénients de la formulation newtonienne	5
1.2.1	Changement de coordonnées	5
1.2.2	Référentiels non galiléens	6
1.2.3	Liaisons	6
1.3	Limites de la mécanique newtonienne	7
1.3.1	L'électrodynamique (Maxwell) n'obéit pas au principe de relativité	7
1.3.2	À des distances microscopiques	7
2	Formulation lagrangienne	9
2.1	Équations d'Euler-Lagrange	9
2.2	Changement de coordonnées	10
2.3	Liaisons	12
2.3.1	Liaisons holonomes	12
2.3.2	Lagrangien d'un système avec des liaisons holonomes	12
2.3.3	Multiplicateurs de Lagrange et changement de variables	13
2.3.4	Recette (simple) pour la dynamique d'un système contraint	14
2.4	Liaisons non holonomes	15
2.5	Potentiel dépendant de la vitesse	15
3	Principe variationnel	17
3.1	Principe de moindre action	17
3.2	Liaisons et principe variationnel	19
4	Symétries et lois de conservation	21
4.1	Introduction	21
4.2	Exemples : transformations spatiales	21

4.2.1	Particule libre	22
4.2.2	Oscillateur harmonique	22
4.2.3	Système fermé de deux particules	22
4.2.4	Système à N particules	22
4.3	Théorème de Noether	23
5	Formulation hamiltonienne	27
5.1	Équations d'Hamilton	27
5.2	Principe de moindre action (Hamilton)	29
5.3	Espace des phases et crochets de Poisson	30
5.4	Théorème de Liouville	33
5.5	Transformations canoniques	34
5.6	Transformations infinitésimales, symétries et Noether	40
6	Introduction à la relativité restreinte	43
6.1	Principe de relativité	43
6.2	Conséquences	44
6.2.1	Relativité de la simultanéité	44
6.2.2	Dilatation du temps	45
6.2.3	Contraction des longueurs	46
6.3	Boost de Lorentz	46
6.4	Géométrie de l'espace-temps	51
7	Transformations de Lorentz	57
7.1	Le groupe de Lorentz	57
7.2	Quadri-vecteurs covariants et contravariants	59
7.3	Tenseurs	60
8	Mécanique relativiste	61
8.1	Temps propre	61
8.2	Quadri-vitesse	62
8.3	Énergie-impulsion	63
8.4	Équation de Newton relativiste	64
8.5	Application aux collisions	65
8.6	Lagrangien pour une particule relativiste	66

Chapitre 1

Mécanique newtonienne

1.1 Rappel : les lois de Newton

La deuxième loi de Newton est $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$.

- $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ est une équation différentielle du 2^e ordre c'est-à-dire étant donné $r(t_0)$ et $\dot{r}(t_0)$, Newton détermine $r(t)$ pour tout $t > t_0$.
- valide dans un référentiel inertiel (galiléen). Deux référentiels inertiels sont liés par une *transformation de Galilée* :

1. translation spatiale $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{c}$, $t' = t$
2. translation temporelle $t' = t + c$, $\vec{r}' = \vec{r}$
3. rotation $\vec{r}' = R\vec{r}$, $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ / $R^t R = I_3$ et $\det R = 1$
4. transformation propre de Galilée (boost) $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$, $t' = t$

- principe de relativité
- plusieurs particules \vec{r}_i , $i = 1, \dots, N$
Newton : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N)$

1.2 Inconvénients de la formulation newtonienne

1.2.1 Changement de coordonnées

Les équations de Newton $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ sont formulées :

- dans un référentiel inertiel
- en terme de coordonnées cartésiennes $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Par exemple, on peut étudier le passage en coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z \\ m \frac{d^2}{dt^2}(r \cos \theta) &= F_x \\ m \frac{d^2}{dt^2}(r \sin \theta) &= F_y \\ &\vdots \\ m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta \\ m(r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}) &= F_x \sin \theta - F_y \cos \theta \end{aligned}$$

Les équations ne sont plus de la forme $\begin{cases} m\ddot{r} = F_r \\ m\ddot{\theta} = F_\theta \end{cases}$

1.2.2 Référentiels non galiléens

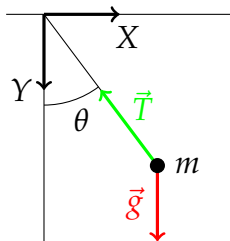
Pour les référentiels en rotation, $\vec{r}' = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}$

ce qui donne, $m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{-2m(\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}}')}_{\text{force de Coriolis}} - \underbrace{m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')}_{\text{force centrifuge}} + \vec{F}$ avec $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$

1.2.3 Liaisons

Dans un système avec des contraintes internes, les coordonnées ne sont pas indépendantes.

Prenons l'exemple simple du pendule :



Contrainte : $X^2 + Y^2 = l^2$ où $\begin{cases} X = l \cos \theta \\ Y = l \sin \theta \end{cases}$

Newton : force de liaison $\vec{F}_l = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \cdot \frac{T}{l}$ où T est la tension du fil.

Il faut déterminer T tel que $X^2 + Y^2 = l^2$

Newton : $\begin{cases} m\ddot{X} = -\frac{T}{l}X \\ m\ddot{Y} = -\frac{T}{l}Y + mg \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2}(l \sin \theta) = -T \sin \theta \\ m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos \theta) = -T \cos \theta + mg \end{cases}$

Après calcul, on obtient $\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$ et $T = ml\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta$. La première

équation donne la dynamique du pendule. Le résultat est simple mais la dérivation est longue.

1.3 Limites de la mécanique newtonnienne

1.3.1 L'électrodynamique (Maxwell) n'obéit pas au principe de relativité

Si on a les équations de Newton et Maxwell dans un référentiel \mathcal{R} , et que les équations de Maxwell sont modifiées dans un référentiel \mathcal{R}' alors les équations de Newton seront également modifiées. Ceci est résolu grâce à la relativité restreinte.

1.3.2 À des distances microscopiques

Les formulations lagrangienne et hamiltonienne sont à la base de la mécanique quantique.

Chapitre 2

Formulation lagrangienne

2.1 Équations d'Euler-Lagrange

On considère le cas d'une force dérivant d'un potentiel (conservative) :
 $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$

Définition. Le Lagrangien L est défini par :

$$L = T - V \text{ où } \begin{cases} T = E_c = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 \\ V \text{ est l'énergie potentielle} \end{cases}$$

Remarques.

- Ce n'est pas l'énergie : $E = T + V = cste$
- On considère L comme une fonction de $\vec{r}(t)$ et $\dot{\vec{r}}(t)$ et on considère \vec{r} et $\dot{\vec{r}}$ comme des variables indépendantes. Ici, $T = T(\dot{\vec{r}})$ et $V = V(\vec{r})$
- En général, $L = L(\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t), t)$ fonction de plusieurs variables.

Définition. Équations d'Euler-Lagrange associées à un Lagrangien L :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0}$$

On peut faire le calcul pour $L = T - V$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \sum_j \dot{x}_j^2 \right) = m \dot{x}_i \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = m \ddot{x}_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

Ainsi, Euler-Lagrange donne $m \ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$ et on retrouve bien Newton. On a une manière équivalente de formuler les équations de Newton, et on verra les avantages de cette formulation plus tard.

Pour N particules : $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$ avec $\vec{\nabla}_i = \begin{pmatrix} \partial_{x_{i,1}} \\ \partial_{x_{i,2}} \\ \partial_{x_{i,3}} \end{pmatrix}$

Le Lagrangien s'écrit alors $L = T - V = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$

D'où Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{i,j}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_{i,j}} = 0$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, 2, 3$

Cela reproduit bien Newton.

Notation. Parfois (souvent), on va numéroter les $3N$ coordonnées comme x_a avec $a = 1, \dots, 3N$

Euler-Lagrange s'écrit alors $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0$

2.2 Changement de coordonnées

Théorème. Les équations d'Euler-Lagrange ne dépendent pas du choix des coordonnées.

Un changement de coordonnées s'écrit $x_a \rightarrow q_a = q_a(x_1, \dots, x_{3N}, t)$ et est bijectif donc la matrice jacobienne est inversible.

Pour rappel : $J = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_j} \right)_{3N}$ et $J^{-1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)_{3N}$

Théorème. En terme de q_a , les équations d'Euler-Lagrange deviennent :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0}$$

Démonstration.

Remarques.

1. $\dot{q}_a = \frac{d}{dt}q_a(x_1, \dots, x_{3N}) = \sum_b \frac{\partial q_a}{\partial x_b} \frac{\partial x_b}{\partial t} + \frac{\partial q_a}{\partial t} = \sum_b \frac{\partial q_a}{\partial x_b} \dot{x}_b + \frac{\partial q_a}{\partial t}$
2. de même $\dot{x}_b = \sum_a \frac{\partial x_b}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial x_b}{\partial t}$
3. $x_b(q(t), t), \dot{x}_b(q(t), \dot{q}(t), t)$ et $\boxed{\frac{\partial \dot{x}_b}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial x_b}{\partial q_a}}$

En terme des nouvelles variables, on a $L(q, \dot{q}, t) = L(x(q, t), \dot{x}(q, \dot{q}, t), t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_a} &= \sum_b \left(\frac{\partial L}{\partial x_b} \frac{\partial x_b}{\partial q_a} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} \frac{\partial \dot{x}_b}{\partial q_a}}_{\sum_c \frac{\partial^2 x_b}{\partial q_a \partial q_c} \dot{q}_c + \frac{\partial^2 x_b}{\partial q_a \partial t}} \right) \quad (\text{Remarque 2}) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} &= \sum_b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} \frac{\partial x_b}{\partial q_a} \quad (\text{Remarque 3}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) &= \sum_b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} \right) \frac{\partial x_b}{\partial q_a} + \sum_b \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_b}{\partial q_a} \right)}_{\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_b}{\partial q_a} + \sum_c \frac{\partial}{\partial q_c} \frac{\partial x_b}{\partial q_a} \dot{q}_c} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_a} = \sum_b \frac{\partial x_b}{\partial q_a} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_b} \right)}_{\equiv 0} = 0$$

□

Par exemple, prenons $V = \frac{1}{2}k\dot{r}^2$ en coordonnées cylindriques.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= -\vec{\nabla} V \\ T &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) \\ V &= \frac{1}{2}k(r^2 + z^2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow L = T - V$$

Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \text{pour } r : \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + kr = 0 \\ \text{pour } \theta : \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0 \end{aligned}$$

2.3 Liaisons

Pour un système de N particules, on a $2N$ ou $3N$ coordonnées suivant si on est dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Dans le cas de liaisons, ces coordonnées ne sont pas indépendantes.

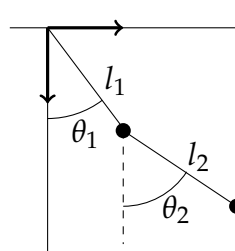
2.3.1 Liaisons holonomes

Définition. Les liaisons holonomes sont représentées par R contraintes de la forme $f_\alpha(x_a, t) = 0$, $\alpha = 1, \dots, R$.

On peut alors éliminer R coordonnées, ce qui donne les coordonnées généralisées indépendantes q_i , $i = 1, \dots, 3N - R$. Alors $x_a = x_a(q_i, t)$.

Par exemple, pour le pendule, on a deux coordonnées x, y reliées par la relation $f(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$. Il y a donc une coordonnée généralisée θ avec $x = l \cos \theta$, $y = l \sin \theta$.

Considérons maintenant le double pendule :



On a quatre coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2 mais on a deux contraintes :

$$\begin{cases} f_1 = x_1^2 + y_1^2 - l_1^2 = 0 \\ f_2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l_2^2 = 0 \end{cases}$$

Cela fait donc deux coordonnées généralisées θ_1 et θ_2 , ce qui donne $x_1 = l_1 \sin \theta_1$, $x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2, \dots$

2.3.2 Lagrangien d'un système avec des liaisons holonomes

$$L = L_0 + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} f_{\alpha}(x, t) = L(x_a, \dot{x}_a, \lambda_{\alpha}, \dot{\lambda}_{\alpha}, t)$$

Les λ_{α} sont des coordonnées supplémentaires appelées *multiplicateurs de Lagrange*.

On passe alors à un système de $3N + R$ coordonnées *indépendantes*. On peut alors réécrire Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \text{Pour } \lambda_\alpha : \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_\alpha} = 0 \\ & 0 - f_\alpha = 0 \Rightarrow f_\alpha = 0 \rightarrow \text{contrainte} \\ \text{Pour } x_a : \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_a} = 0 \\ & \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_a} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial x_a}}_{\text{Newton sans liaisons}} - \underbrace{\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_a}}_{\substack{\text{forces de liaison} \\ \text{intuitif} \rightarrow \text{principe variationnel}}} = 0 \end{aligned}$$

Appliquons cela au pendule simple :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 - l^2 \equiv 0 \\ L &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy + \lambda(x^2 + y^2 - l^2) \end{aligned}$$

Euler-Lagrange donne alors :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} - 2\lambda x &= 0 \\ m\ddot{y} - mg - \underbrace{2\lambda y}_{\substack{\text{force de liaison} \quad 2\lambda = \frac{T}{l}}} &= 0 \\ x^2 + y^2 - l^2 &= 0 \end{aligned}$$

Les multiplicateurs de Lagrange sont presque les forces de liaison. On reproduit Newton avec liaison, ce qui procure deux avantages :

1. une manière systématique d'établir les forces de liaison
2. il faut résoudre les équations "à la Newton" (éliminer $T...$) \rightarrow on peut faire autrement !

2.3.3 Multiplicateurs de Lagrange et changement de variables

Originellement,

$$x_a \xrightarrow[\text{contraintes } f_\alpha]{\quad} q_i \text{ indép.}$$

Maintenant,

$$\begin{array}{ccc} \{x_a, \lambda_\alpha\} & \longrightarrow & \{q_i, f_\alpha, \lambda_\alpha\} \\ \text{indép. } 3N+R & & 3N-R+R+R \end{array}$$

Par exemple, pour le pendule : $\{x, y, \lambda\} \rightarrow \{\theta, r^2 - l^2, \lambda\}$

Alors, $L = L_0(q, (f), \dot{q}, (\dot{f}), t) + \sum_\alpha \lambda_\alpha f_\alpha$ et pour une coordonnée généralisée q_i , Euler-Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Reprenons l'exemple du pendule : on a une coordonnée généralisée θ et

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy \\ &= \frac{1}{2} ml^2 \dot{\theta}^2 + mlg \cos \theta = L(\theta, \dot{\theta}) \end{aligned}$$

On écrit Euler-Lagrange :

$$\begin{aligned} \text{en } \theta : \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2 \ddot{\theta} + mlg \sin \theta = 0 \\ \text{en } f_\alpha : \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{f}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial f_\alpha} = \lambda_\alpha = 0 \quad (\text{force de liaison}) \\ \text{en } \lambda_\alpha : \quad & \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial \lambda_\alpha} = f_\alpha = 0 \quad (\text{contrainte}) \end{aligned}$$

2.3.4 Recette (simple) pour la dynamique d'un système contraint

Si on ne cherche pas l'expression des forces de liaison :

1. Exprimer le Lagrangien L_0 en terme de coordonnées généralisées indépendantes q_i
2. Calculer Euler-Lagrange pour $L_0(q_i, \dot{q}_i, t)$
3. Résoudre les équations (peut rester compliqué...)

Reprenons cette fois-ci l'exemple du double pendule. On a 4 coordonnées x_1, x_2, y_1, y_2 donnant la position des masses m_1 et m_2 , et on a vu qu'on a 2 coordonnées généralisées θ_1 et θ_2 avec les relations :

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin \theta_1 & x_2 &= l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_1 &= l_1 \cos \theta_1 & y_2 &= l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} L_0 = T - V &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + m_1gy_1 + m_2gy_2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + m_1gl_1 \cos \theta_1 \\ &\quad + m_2g(l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) \end{aligned}$$

2.4 Liaisons non holonomes

Une liaison est non holonome si elle ne peut être mise sous la forme $f_\alpha(x_a, t) = 0$. Deux exemples de liaisons non holonomes :

1. une inégalité, sur la sphère par exemple : $x^2 + y^2 \geq R^2$
2. une contrainte qui dépend de la vitesse : $f_\alpha(x, \dot{x}, t) = 0$

2.5 Potentiel dépendant de la vitesse

Pour l'instant : $L = T - V$ avec $V = V(x_a)$, c'est-à-dire une force dérivant d'un potentiel $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$

Considérons une particule chargée dans un champ électromagnétique.

Newton : $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{Lorentz} = q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \wedge \vec{B})$

Pour rappel, il existe un potentiel scalaire ϕ et vectoriel \vec{A} . En effet,

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= 0 \Leftrightarrow \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} && \text{localement (lemme de Poincaré)} \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{C} &= 0 \Leftrightarrow \vec{C} = \overrightarrow{\text{grad}} W && \text{idem} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \\ \vec{E} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

On pose alors le potentiel généralisé :

$$V_{ED}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = q(\phi(\vec{r}, t) - \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t))$$

Théorème. $L = T - V_{ED}$ décrit Newton-Lorentz.

Démonstration. Calculons Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} \right) = m\ddot{\vec{r}} + q \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \partial_x \vec{A} \frac{\partial x}{\partial t} + \partial_y \vec{A} \frac{\partial y}{\partial t} + \partial_z \vec{A} \frac{\partial z}{\partial t} \right)$$

$$= m\ddot{\vec{r}} + q \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + (\dot{\vec{r}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} \right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} L = -q \overrightarrow{\text{grad}} \phi + q \overrightarrow{\text{grad}} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})$$

Donc

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{-q \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} - q \overrightarrow{\text{grad}} \phi}_{q\vec{E}} - \underbrace{q(\dot{\vec{r}} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} + q \overrightarrow{\text{grad}} (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A})}_{q\dot{\vec{r}} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}$$

On retrouve bien la force de Lorentz. □

Chapitre 3

Principe variationnel

3.1 Principe de moindre action

Pour l'instant, les équations d'Euler-Lagrange donnent $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$ pour $L = T - V$
Mais quelle interprétation peut-on donner à cette équation ?

Définition. Pour une particule avec une trajectoire $x(t)$, et un Lagrangien L , on définit son action :

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

La trajectoire est celle pour laquelle l'action S est minimale.

Remarques.

- S est une fonctionnelle, c'est-à-dire une fonction d'une fonction :
 $S : X \rightarrow \mathbb{R}$ où $X = \{x : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R} / x(t_1) = x_1, x(t_2) = x_2\}$.
- S n'est pas un fonction de t
- $[L] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2} = \text{J}$
- $[S] = \text{kg m}^2 \text{s}^{-1} = \text{J s}$

Théorème (Principe de moindre action (Hamilton)). *La particule "choisit" la trajectoire physique pour laquelle l'action S est minimale.*

Comment trouver cette trajectoire ?

On cherche \bar{x} tel que $f'(\bar{x}) = 0$. Ici, on doit minimiser une fonctionnelle S donc " $\frac{dS[x]}{dx} = 0$ " (calcul variationnel) mais x est une fonction !

Concrètement, on cherche \bar{x} tel que $f(\bar{x} + \underbrace{\delta\bar{x}}_{\varepsilon}) = f(\bar{x}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Il faut donc calculer $\delta S = S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}] \stackrel{!}{=} \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad \forall \delta x$

Calcul de δS

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\bar{x} + \delta x] - S[\bar{x}] = \int_{t_1}^{t_2} L(\bar{x} + \delta x, \dot{\bar{x}} + \delta \dot{x}, t) - L(\bar{x}, \dot{\bar{x}}, t) dt \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial x} \delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} dt \quad \text{mais } \delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta x \frac{\partial L}{\partial x} + \left(\frac{d}{dt} \delta x \right) \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dt \\ &\stackrel{\text{IPP}}{=} \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \delta x \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \right) dt}_{\delta S} + \underbrace{\left[\delta x \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} \\ &\quad \text{car } \delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\delta S \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \delta x \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \text{équation d'Euler-Lagrange.}$$

Remarques.

- Techniquement, Euler-Lagrange \nRightarrow minimum pour S .
- De plus un minimum est local, pas forcément global.
- Avec plusieurs coordonnées $x_a(t)$, on cherche la trajectoire $\bar{x}_a(t)$ telle que $\delta S = S[\bar{x}_a + \delta x] - S[\bar{x}_a] = 0 \quad \forall \delta x_a$

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \delta x_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \delta \dot{x}_a dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \delta x_a \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_a} \right)}_{\equiv 0 \rightarrow \text{E.L.}} dt \end{aligned}$$

- Convention d'Einstein : $x_a y_a = \sum_a x_a y_a$
- Interprétation géométrique d'Euler-Lagrange, ce qui explique l'invariance par changement de coordonnées.
- Non-unicité du Lagrangien $L \rightarrow L + \frac{d}{dt} F(x, t) \rightarrow \text{E.L. invariant.}$
En terme d'action $S \rightarrow S + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial t} dt = S + \underbrace{F(x(t_1), t_1) - F(x(t_2), t_2)}_{\delta X=0 \text{ car cst}}$

- Principe variationnel : cf. optique géométrique, principe de Fermat.
- Ici, la mécanique newtonienne est décrite par une action, mais c'est vrai pour toutes les interactions fondamentales :

$$L = \sqrt{g}(\underbrace{R}_{\text{Rel. Gén.}} + \underbrace{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\text{Maxwell}} + \underbrace{\bar{\psi}\not{D}\psi}_{\text{Dirac}})$$
- Le principe de moindre action est contre-intuitif : toutes les trajectoires sont empruntées en même temps ? → méca. Q.
- En méca. Q. : Feynman → intégrales de chemin.

3.2 Liaisons et principe variationnel

Pour un système avec des contraintes, on doit minimiser une fonction $h(x,y)$ sous condition $f(x,y) = 0$ (par exemple les courbes de niveau $h(x,y) = \text{cst}$. La méthode standard :

- Résoudre $f(x,y) = 0$ pour $y = y_f(x)$ tel que $f(x, y_f(x)) = 0$ (peut être difficile...)
- Minimiser $h(x) = h(x, y_f(x))$ en fonction de x

$$\Leftrightarrow \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial x} = 0 \quad \text{résoudre pour } x.$$

- Méthode par multiplicateur de Lagrange.

y_f définie par $f(x, y_f(x)) = 0$

Dérivée : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y_f}{\partial x} = 0$, à combiner avec la remarque précédente

$$\Rightarrow \vec{\nabla} h = \underbrace{\left(\frac{\partial_x h}{\partial_x f} \right)}_{-\lambda} \vec{\nabla} f$$

$$\text{En effet : } \begin{cases} \partial_x h = \partial_x f \frac{\partial_x h}{\partial_x f} \\ \partial_y h = \partial_y f \frac{\partial_x h}{\partial_x f} \end{cases} \Leftrightarrow \partial_x f \partial_y h = \partial_y f \partial_x h \Leftrightarrow -\partial_y f \partial_x y_f \partial_y h = -\partial_y f \partial_y h \partial_x y_f$$

Traduction en problème variationnel de $H(x,y,\lambda) = h(x,y) + \lambda f(x,y)$. Extrema :

$$\partial_x h + \partial_y h \partial_x y_f = 0$$

$$\partial_x f + \partial_y f \partial_x y_f = 0$$

$$f = 0$$

Prenons l'exemple du rectangle de plus grande surface : il faut maximiser $h(x,y) = xy$ sous la contrainte $x + y = \frac{1}{2}L$.

$H(x,y) = xy - \lambda(\frac{1}{2}L - x - y)$, ce qui donne $y = \lambda$, $x = \lambda$, $\frac{1}{2}L - x - y = 0$. Les deux premières équations nous disent que la solution est un carré !

En TD, on a vu le même problème avec des fonctionnelles : $S[x]$ à extrémiser sous condition $F[x] = 0$. Pour cela, on extrémise $S[x] + \lambda F[x] \dots$

On peut prendre l'exemple de la chaînette dans un champ de gravitation.

Il faut alors minimiser U_{pot} .

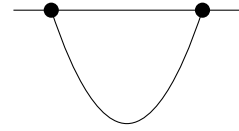
Ici, λ est une variable, pas une fonction.

$F[x] = 0$ est une contrainte globale. Avant, on avait une contrainte locale :

$f(x_a) = 0 \quad \forall t \Rightarrow$ nombre infini de contraintes globales $\Rightarrow \lambda$ fonction de t

$F_{t_0}[x_a] = f(x_a(t_0)) \quad \forall t_0 \rightarrow \lambda_{t_0}$

\Rightarrow on doit extrémiser $\bar{S}[x, \lambda] = S[x] + \int F_t[x] \lambda_t dt = \int \underbrace{L + \lambda(t)f(t)}_{\bar{L}} dt$



Chapitre 4

Symétries et lois de conservation

4.1 Introduction

Définition (Symétrie). Un système est symétrique s'il est invariant par une transformation de coordonnées. Plus précisément, si $x_a \rightarrow x'_a(x, t)$, $t \rightarrow t'(x, t)$, le système est invariant si les équations du mouvement explicites sont les mêmes en terme de (x_a, t) et en terme de (x'_a, t') .

Il y a deux façons de voir un changement de coordonnées :

1. Transformation passive : je change mon référentiel pour décrire mon système physique. Symétries : les deux observateurs identifient les mêmes lois de la physique (ex. : lois de Newton par transformation de Galilée).
2. Transformation active : dans un seul référentiel, on décrit deux systèmes physiques qui obéissent aux mêmes équations du mouvement. C'est le point de vue "pratique".

Il y a deux types de symétries :

- Symétries discrètes $x_a \rightarrow -x_a$ (ex. : réflexion)
- Symétries continues $x_a \rightarrow x_a + c$ (ex. : translation, c est un paramètre continu)

Souvent pour les symétries continues, il suffit de considérer la transformation infinitésimale, c'est-à-dire $x'_a = x_a + \varepsilon$.

4.2 Exemples : transformations spatiales

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{c}, \quad t' = t \quad \leftarrow \quad \dot{\vec{x}}' = \dot{\vec{x}}, \quad \ddot{\vec{x}}' = \ddot{\vec{x}}$$

4.2.1 Particule libre

$m\ddot{\vec{x}} = 0$ dans $\mathcal{R} \Rightarrow m\ddot{\vec{x}}' = 0$ dans \mathcal{R}' . Il y a les mêmes lois physiques dans les deux référentiels. Lagrangien $L = \frac{1}{2}|\dot{\vec{x}}|^2 = \frac{1}{2}|\dot{\vec{x}}'|^2$

4.2.2 Oscillateur harmonique

$m\ddot{\vec{x}} = -k\vec{x} \Rightarrow m\ddot{\vec{x}}' = -k(\vec{x} - \vec{c})$ Les équations dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont différentes. Le potentiel de l'oscillateur brise l'invariance par symétrie.
 $L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}'|^2 - \frac{1}{2}k|\vec{x}|^2$

4.2.3 Système fermé de deux particules

On a $\vec{x}'_1 = \vec{x}_1 + \vec{c}$, $\vec{x}'_2 = \vec{x}_2 + \vec{c}$. Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2 - \underbrace{\frac{1}{2}k(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2}_{\text{potentiel invariant}}$$

On a la même physique ! Pour un Lagrangien invariant par transformation spatiale, $L(x_a, \dot{x}_a, t) = L(x'_a, \dot{x}'_a, t') = L(x_a + c, \dot{x}_a, t)$

4.2.4 Système à N particules

x_A , $A = 1, \dots, N$ critère de symétrie :

$$\begin{aligned} L(\vec{x}_a, \dot{\vec{x}}_a, t) &= L(\vec{x}_a + \vec{\varepsilon}, \dot{\vec{x}}_a, t) \text{ transf. infinitésimale } \varepsilon \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} L(\vec{x}_a, \dot{\vec{x}}_a, t) + \underbrace{\vec{\varepsilon} \cdot \sum_A \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_A}}_{\Delta L \equiv 0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

où $\frac{\partial}{\partial \vec{x}_A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_A} \\ \frac{\partial}{\partial y_A} \\ \frac{\partial}{\partial z_A} \end{pmatrix}$ ($\overrightarrow{\text{grad}}$ par rapport aux coordonnées de la particule A).

$$0 = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_A \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_A} = \vec{\varepsilon} \cdot \sum_A \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_A} \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P} = 0 \text{ avec } \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_A} \text{ impulsion du système.}$$

On remarque qu'une symétrie du système implique une charge conservée (intégrale du mouvement). Translation spatiale \leftrightarrow conservation de l'impulsion.

4.3 Théorème de Noether

Théorème. *S'il y a une symétrie alors il existe une charge conservée.*

Démonstration. On considère un système Σ tel que son action S soit invariante par transformation $\begin{cases} x'_a = x_a + \Delta x_a \\ t' = t + \Delta t \end{cases}$ (au premier ordre). La symétrie donne $S[x] = S[x']$ c'est-à-dire $\int_{t_1}^{t_2} L(x_a, \dot{x}_a, t) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} L(x'_a, \dot{x}'_a, t') dt'$

$$\begin{aligned} - \quad dt' &= dt \frac{dt'}{dt} = dt \left(1 + \frac{d}{dt} \Delta t \right) \Rightarrow \frac{d}{dt'} = \left(1 - \frac{d}{dt} \Delta t \right) \frac{d}{dt} \\ - \quad \dot{x}'_a &= \frac{dx'_a}{dt'} = \left(1 - \frac{d}{dt} \Delta t \right) \frac{d}{dt} (x_a + \Delta x_a) = \frac{dx_a}{dt} + \frac{d}{dt} \Delta x_a - \dot{x}_a \frac{d}{dt} \Delta t \\ \int_{t'_1}^{t'_2} L(x'_a, \dot{x}'_a, t') dt' &= \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + \frac{d}{dt} \Delta t \right) \left[L(x_a, \dot{x}_a, t) + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t + \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \Delta x_a \right. \\ &\quad \left. + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \underbrace{\left(\frac{d}{dt} \Delta x_a - \dot{x}_a \frac{d}{dt} \Delta t \right)}_{\Delta \dot{x}_a} \right] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} L(x_a, \dot{x}_a, t) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial t} \Delta t + \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \Delta x_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \Delta \dot{x}_a \right] dt + \mathcal{O}(\varepsilon^2) dt \end{aligned}$$

On appelle ΔL le crochet dans la seconde intégrale. Pour une symétrie, $\Delta L = 0$.

$$\begin{aligned} 0 = \Delta L &= \frac{d}{dt} \left\{ \Delta t L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{x}_a \Delta t + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \Delta x_a \right\} + \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t + \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \Delta x_a \\ &\quad - \Delta t \frac{dL}{dt} + \sum_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \dot{x}_a \Delta t + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a \Delta t - \sum_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \Delta x_a \end{aligned}$$

Or $\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \dot{x}_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a$, et en utilisant Euler-Lagrange, la partie en-dehors des accolades devient :

$$\begin{aligned} -\Delta t \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \dot{x}_a - \Delta t \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \dot{x}_a \Delta t &- \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t + \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \Delta x_a = 0 \\ + \Delta t \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a &+ \frac{\partial L}{\partial t} \Delta t - \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \Delta x_a \end{aligned}$$

□

Théorème. *S'il y a une symétrie, alors il existe une charge conservée Q conservée ($\frac{dQ}{dt} = 0$) où :*

$$Q = \Delta t \left(L - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{x}_a \right) + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \Delta x_a$$

On peut généraliser le résultat. En effet, ici $\Delta L = 0$ mais une symétrie est équivalente à $\Delta L = \frac{df}{dt}(x_a, t)$. Le même calcul donne alors $\frac{dQ}{dt} = \frac{df}{dt}$. La charge conservée est alors $\hat{Q} = Q - f$.

Prenons l'exemple des translations spatiales :

$$\begin{cases} \vec{x}'_a = \vec{x}_a + \vec{\epsilon} \\ t' = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \vec{x}_a = \vec{\epsilon} (x_{A,i}) \\ \Delta t = 0 \end{cases}$$

Si Σ est invariant par translation, il y aura une charge conservée.

$$\hat{Q} = \sum_{A,i} \epsilon_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{A,i}} = \sum_A \vec{\epsilon} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_A} = \vec{\epsilon} \vec{P} \text{ avec } \vec{P} = \sum_A \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}_A} \text{ (impulsion du système)}$$

Pour ce qui est des translations temporelles :

$$\begin{cases} \vec{x}'_a = \vec{x}_a \\ t' = t + \epsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \vec{x}_a = 0 \\ \Delta t = \epsilon \end{cases}$$

Alors cela implique $\Delta L = \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0$ d'où une condition de symétrie de Σ : $L = L(x_a, \dot{x}_a, t) = T - U(x_a, \dot{x}_a, t)$.

La charge associée est alors : $\hat{Q} = -\epsilon \left\{ \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \dot{x}_a - L \right\}$ avec $\frac{d\hat{Q}}{dt} = 0$

Cette charge représente l'énergie conservée du système, par exemple, pour $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$, on a $\hat{Q} = -\epsilon \{ m\dot{x}\dot{x} - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U \} = -\epsilon(T + U)$

On vérifie la conservation :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Q}}{dt} &= -\epsilon \left\{ \sum_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) \dot{x}_a + \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial t} - \sum_a \frac{\partial L}{\partial x_a} \dot{x}_a - \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \ddot{x}_a}_{-\frac{dL}{dt}} \right\} \\ &= \epsilon \frac{\partial L}{\partial t} \end{aligned}$$

CHAPITRE 4. SYMÉTRIES ET LOIS DE CONSERVATION

Pour les rotations, (voir TD), la charge associée est le moment angulaire \vec{L} .
 Pour les boosts de Galilée (voir TD), la charge est ? (un peu bizarre...).

Il existe d'autres symétries.

Le théorème de Noether ne prouve qu'une implication, l'autre (charge conservée \Rightarrow symétrie) sera vue plus tard grâce à la formulation hamiltonienne.

Prenons l'exemple d'une particule dans un champ gravitationnel $\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -g \end{cases}$

Cela donne les symétries :

transformation	charge
trans. temporelle	E
trans. en x	P_x
trans. en y	P_y
trans. en z	? P_z
rotation autour de O_z	L_z

Lagrangien : $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgz$ n'est pas invariant par translation selon z .

$$\begin{aligned} \Delta L &= -mg\varepsilon \text{ (si } z \rightarrow z + \varepsilon) \\ &= \frac{d}{dt} \underbrace{(-mgt\varepsilon)}_f \end{aligned}$$

La vraie charge conservée est : $\hat{Q} = \varepsilon \frac{\partial L}{\partial z} - f = \varepsilon m(\dot{z} + gt)$ donc la charge constante est $\varepsilon m(\dot{z} + gt)$ et $\frac{d}{dt} \varepsilon m(\dot{z} + gt) = \ddot{z} + g = 0$

Remarques.

- La charge conservée s'interprète physiquement comme l'impulsion p_z calculée à $t = 0$.
- C'est moins intéressant...
- ...mais c'est intéressant pour résoudre les équations du mouvement $\dot{z} + gt = cst$

Chapitre 5

Formulation hamiltonienne

C'est une reformulation de la mécanique équivalente à la formulation lagrangienne. Il y a peu d'avantages pratiques (calculer la dynamique) mais il y a des avantages structurels ce qui a permis de développer la mécanique quantique et la mécanique statistique. Les équations d'Euler-Lagrange donnent N équations différentielles du deuxième ordre pour N coordonnées.

L'idée de Hamilton est de passer à $2N$ équations du premier ordre en considérant les positions et les vitesses.

5.1 Équations d'Hamilton

Définition. À toute coordonnée q_a , on associe son *moment conjugué* (ou *impulsion généralisée*) : $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$

Par exemple : $L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \Rightarrow p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q}$ D'après Euler-Lagrange :

$$\boxed{\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \\ \dot{p}_a &= \frac{\partial L}{\partial q_a} \end{aligned}}$$

On a une équation en q, \dot{q}, p, \dot{p} .

L'idée est alors d'éliminer les \dot{q}_a en faveur des p_a pour passer à un système de (q, p) (coordonnées indépendantes !). Pour cela, on fait une transformation de Legendre.

Définition. On définit le Hamiltonien du système par :

$$H(q, p) = \sum_a p_a \dot{q}_a - L(q_a, \dot{q}_a, t)$$

Pour calculer $H(q, p)$ comme fonction de q et p , il faut exprimer $\dot{q}_a = \dot{q}_a(q, p, t)$. Pour cela, il faut inverser les équations $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}(q_a, \dot{q}_a, t)$. On a N équations desquelles on tire $\dot{q}_a(q, p, t)$. De la définition, on tire les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_a} &= \dot{q}_a + \sum_b p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial p_a} = q_a \\ \frac{\partial H}{\partial q_a} &= \sum_b p_b \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} - \sum_b \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b}}_{p_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial q_a} = -\dot{p}_a \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p_a} &= \dot{q}_a \\ \frac{\partial H}{\partial q_a} &= -\dot{p}_a \end{aligned}$$

Remarques.

- On a $2N$ équations différentielles du premier ordre, ce sont les équations de Hamilton.
- Elles sont symétriques $q \leftrightarrow p$ au signe " - " près, mais ce signe est fondamental !
- $H = \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \dot{q}_a - L$. L'énergie du système est conservée si $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. En général, $\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}$
- Le calcul de $H(q, p)$ nécessite de résoudre $p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}$ pour \dot{q}_a .

On a donc la condition $M_{a,b} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b}$ (matrice jacobienne) est inversible. Pour $L = \frac{1}{2} \dot{q}_a \dot{q}_b$, $M_{a,b} = \delta_{a,b}^b$.
Souvent ce n'est pas possible. Il faut alors modifier la définition de H ou utiliser le formalisme de Dirac.

Prenons plusieurs exemples :

1. Particule dans un potentiel, $L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - U(\vec{x})$.

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m \dot{\vec{x}} \text{ (impulsion)}$$

$$\Rightarrow H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{p} - \left(\frac{1}{2m} \vec{p}^2 - U(\vec{x}) \right) = \frac{1}{2m} \vec{p}^2 + U(\vec{x})$$

2. Particule dans un champ EM, $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - q(\phi - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A})$
 $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A}$ (impulsion généralisée)
 $\Rightarrow H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \dots = \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi$
 Les équations de Hamilton donnent : $\dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}$, et $\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$
3. Particule dans un potentiel central, $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(|\vec{x}|) \Rightarrow$ coordonnées sphériques : $\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ x = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$
 $\Rightarrow L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - V(r)$
 $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}$

$$\begin{aligned} H = \dot{q}p - L &= \dot{r}p_r + \dot{\theta}p_\theta + \dot{\varphi}p_\varphi - L \\ &= \frac{1}{m}p_r^2 + \frac{1}{mr^2}p_\theta^2 + \frac{1}{mr^2 \sin^2 \theta}p_\varphi^2 - L \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}p_\varphi^2 \right) + V(r) \\ &= H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) \\ &= H(r, \theta, p_r, p_\theta, \text{cst}) \end{aligned}$$

équation de Hamilton : par exemple, $\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \text{cst}$

5.2 Principe de moindre action (Hamilton)

Lagrange : $S = \int L dt$, on extrémise $S[q] \rightarrow$ Euler-Lagrange.

Hamilton : $S[q, p] = \int_{t_1}^{t_2} \sum_a p_a \dot{q}_a - H(q, p) dt$

Pour extrémiser cette action, on fait le changement de variables infinitésimal $q_a \rightarrow q_a + \delta q_a$, $p_a \rightarrow p_a + \delta p_a$ et on cherche la trajectoire telle que $\delta S = 0$

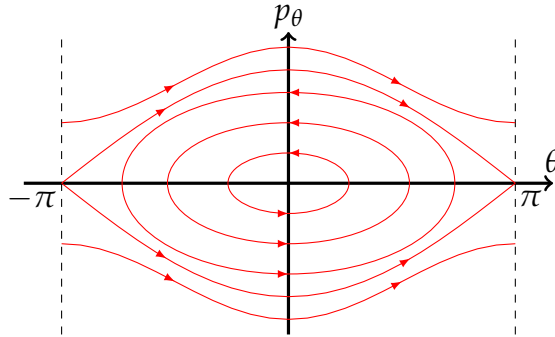
$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \left(\delta p_a \dot{q}_a + p_a \frac{d}{dt} \delta q_a \right) - \sum_a \left(\frac{\partial H}{\partial q_a} \delta q_a + \frac{\partial H}{\partial p_a} \delta p_a \right) dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_a \delta p_a \left(\dot{q}_a - \frac{\partial H}{\partial p_a} \right) - \sum_a \delta q_a \left(\dot{p}_a + \frac{\partial H}{\partial q_a} \right) dt + \underbrace{\left[\sum_a p_a \delta q_a \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} \\
 &\quad \text{car } \delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{q}_a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q_a} \quad \text{équations de Hamilton.}$$

5.3 Espace des phases et crochets de Poisson

Lagrange : l'espace des configurations $\{q_a(t)\} \quad a = 1, \dots, N$
 E-L : équa. diff. 2^e ordre, CI : $q_a(t_0), \dot{q}_a(t_0)$
 Hamilton : l'espace des phases $\{q_a(t), p_a(t)\} \quad a = 1, \dots, N$
 Hamilton : équa. diff. 1^{er} ordre, CI : $q_a(t_0), p_a(t_0)$

Reprenons l'exemple du pendule. On a une coordonnée $\theta(t)$. L'espace des phases dans la formulation hamiltonienne est $\{\theta(t), p_\theta\}$.



Les trajectoires ne se croisent jamais ! (déterminées par une équation du 1^{er} ordre, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'unicité).

Notation. Pour alléger la notation, dans la suite, on notera :

$$\vec{Z} = \{q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, q_N, p_N\} = \{z_\alpha\}, \quad \alpha = 1, \dots, 2N$$

Alors,

$$\dot{z}_\alpha = \sum_\beta \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial z_\beta} \quad \text{avec} \quad \Omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} & 0 \\ \hline 0 & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \\ \hline & \ddots \end{pmatrix}_{\alpha\beta}$$

On considère sur l'espace des phases une fonction $F(q,p)$. Comment évolue F dans le temps (si q et p suivent les trajectoires physiques) ?

$$\frac{d}{dt}F = \sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial F}{\partial p_a} \dot{p}_a \right) \underset{\text{Hamilton}}{=} \sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial q_a} \frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial H}{\partial q_a} \right)$$

Définition. Pour deux fonctions F, G sur l'espace des phases, on définit leur *crochets de Poisson* par :

$$\{F, G\} = \sum_a \left(\frac{\partial F}{\partial q_a} \frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial G}{\partial q_a} \right) = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial F}{\partial z_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial G}{\partial z_\beta}$$

Alors, l'évolution d'une fonction $F(q,p,t)$ est donnée par :

$$\frac{d}{dt}F = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t}$$

On peut dès lors dégager quelques propriétés :

- $\{, \}$: $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ avec \mathcal{A} l'algèbre des fonctions sur l'espace des phases.
- Antisymétrie : $\{G, F\} = -\{F, G\}$
- Linéarité : $\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha\{F, H\} + \beta\{G, H\}$
- Règle de Leibniz : $\{F \cdot G, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}$
- Identité de Jacobi : $\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$

Remarques.

- Les crochets de Poisson donnent à \mathcal{A} la structure d'algèbre de Poisson.
- On remarque une similarité de $\{, \}$ en mécanique classique avec le commutateur $[,]$ en mécanique quantique : on retrouve l'antisymétrie, la règle de Leibniz (attention au sens de multiplication car en méca Q, on n'a pas la commutativité) et l'identité de Jacobi.
- Crochets fondamentaux :

$$\begin{aligned} \{q_a, q_b\} &= 0 \\ \{p_a, p_b\} &= 0 \\ \{q_a, p_b\} &= \sum_c \frac{\partial q_a}{\partial q_c} \frac{\partial p_b}{\partial p_c} = \sum_c \delta_a^c \delta_b^c = \delta_a^b \end{aligned}$$

Les crochets de Poisson anticipent la mécanique quantique !

Evolution dans le temps :

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \quad \forall F$$

$$F(q, p) = q \Rightarrow \dot{q} = \{q, H\} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

$$F(q, p) = p \Rightarrow \dot{p} = \{p, H\} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

$$F(q, p) = H \Rightarrow \frac{dH}{dt} = \{H, H\} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

D'une part, on retrouve les équations de Hamilton, et d'autre part $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, H est conservé.

Définition. Une intégrale du mouvement est telle que :

$$\frac{dI_1}{dt} = 0 \Leftrightarrow \{I_1, H\} + \frac{\partial I_1}{\partial t} = 0$$

Si I_1 ne dépend pas explicitement de t , $\{I_1, H\} = 0$

Théorème (de Poisson). Soient I_1 et I_2 sont des intégrales du mouvement alors $\{I_1, I_2\}$ est une intégrale du mouvement.

Démonstration. Supposons les deux intégrales du mouvement indépendantes de t .

$$\{H, \{I_1, I_2\}\} \underset{\text{Jacobi}}{=} -\{I_1, \underbrace{\{I_2, H\}}_{=0}\} + \{I_2, \underbrace{\{I_1, H\}}_{=0}\} = 0$$

Si $I_1(q, p, t)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\{I_1, I_2\} &= \{\{I_1, I_2\}, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\{I_1, I_2\} \\ &= -\{\{I_2, H\}, I_1\} + \{\{I_1, H\}, I_2\} + \{\frac{\partial I_1}{\partial t}, I_2\} + \{I_1, \frac{\partial I_2}{\partial t}\} \\ &= \{\frac{d}{dt}I_1, I_2\} + \{I_1, \frac{d}{dt}I_2\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

Prenons l'exemple d'une particule dans un potentiel : $H = \frac{1}{2m}\vec{p}^2 + V(\vec{q})$

Les intégrales de mouvement sont :

- $E = H$ car $\{H, H\} = 0 \Rightarrow \frac{dH}{dt} = 0$
- Si $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ alors p_x est conservé. On a alors une nouvelle intégrale du mouvement $\{E, p_x\} \Rightarrow \{p_x, H\} = 0$ (mais pas très intéressant...)
- Si aussi $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ alors p_y est aussi conservé et on a $\{p_x, p_y\} = 0$ (mais on le sait déjà...)
- Moment angulaire : $L_1 = x_2 p_3 - x_3 p_2$.
Imaginons L_1 et L_2 conservés.

$$\{L_1, L_2\} = \{x_2 p_3 - x_3 p_2, x_3 p_3 - x_1 p_3\}$$

$$\begin{aligned} \text{or } \{x_2 p_3, x_3 p_3\} &= x_2 \{p_3, x_3\} p_2 = -x_2 p_1 \\ &= -x_2 p_1 + x_1 p_2 \\ &= L_3 \end{aligned}$$

Le théorème de Poisson nous dit que si L_1 et L_2 sont conservés alors L_3 est conservé.

De plus, on a $\{L_3, p_1\} = \{x_1 p_2 - x_2 p_1, p_1\} = \{x_1 p_2, p_1\} = p_2$

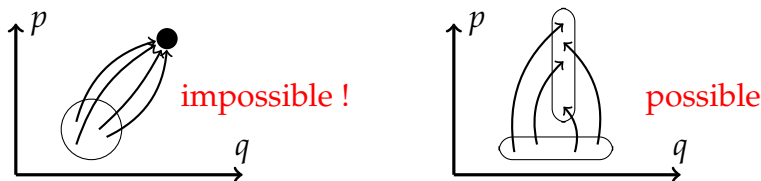
- Pour une particule libre, $V(\vec{q}) = 0$. Alors, \vec{p} et \vec{L} sont conservés, mais ne sont pas indépendants car $\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$. Il y a donc 5 intégrales du mouvement indépendantes.

Théorème. Le nombre d'intégrales du mouvement indépendantes (qui ne dépendent pas explicitement de t) d'un système à N degrés de liberté est $2N - 1$.

5.4 Théorème de Liouville

Si on a N particules, la dimension de l'espace des phases est $2N$. On considère alors un système décrit par une densité ρ en espace des phases : $\rho(q_i, p_i, t)$. Par exemple, si on ignore l'état exact du système, on considère la probabilité ρ telle que $\int \rho d^N q d^N p = 1$. Si on a N particules identiques (sans interaction), $\int \rho d^N q d^N p = N$.

Théorème (de Liouville). Le volume d'un domaine dans l'espace des phases reste constant dans le temps (mais sa forme peut changer).



On peut faire le parallèle avec la mécanique quantique et l'inégalité de Heisenberg car on a $\Delta q \Delta p \geq \hbar/2$. Le terme à gauche de l'inégalité correspond bien à un volume dans l'espace des phases.

Démonstration. On a N particules donc $dN = \rho dV$. Il n'y a pas de création ni d'annihilation de particule, donc on a une équation de continuité (conservation) :

$$\text{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

d'où avec le théorème de Gauss

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \iiint \rho dV}_{\text{changement nb particules}} + \underbrace{\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}}_{\text{flux à travers la surface du volume}} = 0$$

La divergence exprimée dans l'espace des phases est la même que la divergence en cartésien. Il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \rho \text{div} \vec{v} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \sum_i \left(\dot{q}_i \frac{\partial}{\partial q_i} \rho + \dot{p}_i \frac{\partial}{\partial p_i} \rho \right) + \rho \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} \right) + \rho \underbrace{\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \{\rho, H\} \\ &= \frac{d}{dt} \rho \end{aligned}$$

□

5.5 Transformations canoniques

Pour rappel, dans la formulation lagrangienne, les équations d'Euler-Lagrange sont indépendantes du choix des coordonnées $q_i \rightarrow Q_i(q, t)$. Dans la formulation hamiltonienne, on peut envisager un changement de variables plus général, $q_i \rightarrow Q_i(q, p, t)$, $p_i \rightarrow P_i(q, p, t)$ qui respecte la forme des équations de Hamilton :

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}$$

Autrement dit, en réutilisant la notation compacte introduite précédemment :

$$\dot{z}_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial z_\beta}$$

Considérons un changement de variables $z \rightarrow \eta(z, (t)) = (Q_1, P_1, \dots, Q_N, P_N)$

Alors une question se pose : $\dot{\eta}_\alpha \stackrel{?}{=} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \eta_\beta}$.

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\alpha &= \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta} \dot{z}_\beta = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta} \Omega_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial z_\gamma} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta} \Omega_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial \eta_\delta} \frac{\partial \eta_\delta}{\partial z_\gamma} \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta} \Omega_{\beta\gamma} \frac{\partial \eta_\delta}{\partial z_\gamma} \right)}_{\Omega_{\alpha\delta}} \frac{\partial H}{\partial \eta_\delta} \stackrel{?}{=} \Omega_{\alpha\delta} \frac{\partial H}{\partial \eta_\delta} \end{aligned}$$

Cela donne donc une condition sur la matrice Jacobienne :

si $\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\gamma} \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial z_\delta} = \Omega_{\alpha\beta}$ alors la matrice Jacobienne est dite symplectique et la transformation $z_\alpha \rightarrow \eta_\alpha$ est dite canonique.

Théorème. Les crochets de Poisson restent invariants par transformation canonique :

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\}, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_i^j \quad (*)$$

Réciproquement, toute transformation satisfaisant (*) est canonique.

Démonstration.

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \{\eta_\alpha, \eta_\beta\} = \Omega_{\alpha\beta} \\ &\stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\gamma} \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial \eta_\beta}{\partial z_\delta} \end{aligned}$$

□

Par exemple, considérons l'oscillateur harmonique : $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$.
On veut trouver une transformation canonique $(q, p) \rightarrow (Q, P)$ telle que $H = H(P)$. Alors, on aurait $\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{cst}$ et $\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} \Rightarrow Q = \frac{\partial H}{\partial P}t + Q_0$.
Pour cela, on peut penser à poser $p = f(P) \cos Q$ et $q = \frac{1}{m\omega}f(P) \sin Q$ alors $H = \frac{1}{2m}f^2(P)$.

Vérifions que c'est bien une transformation canonique :

$$\begin{aligned}\{Q, Q\} &= 0 \quad \checkmark \\ \{P, P\} &= 0 \quad \checkmark \\ \{Q, P\} &= 1 \Rightarrow f(P) = \sqrt{2m\omega P} \Rightarrow H = \omega P\end{aligned}$$

Définition. Une transformation $z_\alpha \rightarrow \eta_\alpha(z, t)$ est canonique si la matrice Jacobienne $J_{\alpha\beta} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta}$ est symplectique, c'est-à-dire :

$$J\Omega J^T = \Omega \Leftrightarrow J^T \Omega J = \Omega$$

Démonstration de l'équivalence. Ω est telle que $\Omega^2 = -\mathbb{1}$.

Donc : $(J\Omega)(J^T \Omega) = -\mathbb{1} \Leftrightarrow (J^T \Omega)(J\Omega) = -\mathbb{1}$ □

Donnons d'autres définitions équivalentes : une transformation est canonique si :

— Les crochets de Poisson restent invariants : $\{\eta_\alpha, \eta_\beta\} = \Omega_{\alpha\beta} = \{z_\alpha, z_\beta\}$, c'est-à-dire :

$$\{Q_i, Q_j\} = 0 = \{P_i, P_j\}, \quad \{Q_i, P_j\} = \delta_i^j$$

— Les crochets de Poisson peuvent être calculés par rapport à z ou à η , c'est-à-dire :

$$\{A, B\} \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{\partial A}{\partial z_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial z_\beta} = \frac{\partial A}{\partial \eta_\gamma} \frac{\partial \eta_\gamma}{\partial z_\alpha} \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial B}{\partial \eta_\delta} \frac{\partial \eta_\delta}{\partial z_\beta} \stackrel{\text{can.}}{=} \frac{\partial A}{\partial \eta_\gamma} \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial B}{\partial \eta_\delta}$$

— Les équations de Hamilton sont invariantes dans le cas où $\frac{\partial}{\partial t} \eta_\alpha = 0$:

$$\dot{\eta}_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \eta_\beta} \quad \left(\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} \right)$$

— Les équations de Hamilton restent invariantes dans le cas général mais on doit changer le Hamiltonien :

$$\dot{\eta}_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H'}{\partial \eta_\beta} \quad \text{avec} \quad H' = H + \Delta$$

Démonstration de (\Rightarrow) pour le dernier point.

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_\alpha &= \frac{d}{dt}\eta_\alpha = \{\eta_\alpha, H\} + \frac{\partial}{\partial t}\eta_\alpha = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta} \Omega_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial z_\gamma} + \frac{\partial}{\partial t}\eta_\alpha \\ &= \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta} \Omega_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial \eta_\delta} \frac{\partial \eta_\delta}{\partial z_\gamma} + \frac{\partial}{\partial t}\eta_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \eta_\beta} + \frac{\partial}{\partial t}\eta_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial H'}{\partial \eta_\beta}\end{aligned}$$

Il faut donc trouver Δ tel que :

$$\boxed{\forall \alpha \quad \frac{\partial}{\partial t}\eta_\alpha = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_\beta}}$$

Existence de Δ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\eta_\alpha &= \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial \Delta}{\partial \eta_\beta} = \Omega_{\alpha\beta} \frac{\partial z_\gamma}{\partial \eta_\beta} \frac{\partial \Delta}{\partial z_\gamma} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z_\gamma} \Delta &= -\frac{\partial \eta_\beta}{\partial z_\gamma} \Omega_{\beta\alpha} \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} = K_\gamma\end{aligned}$$

D'après de le lemme de Poincaré, une solution existe localement si

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} K_\beta - \frac{\partial}{\partial z_\beta} K_\alpha = 0$$

Un cas particulier de ce lemme apparaît en électromagnétisme :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} = -\vec{\text{grad}} \phi.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} K_\beta - \frac{\partial}{\partial z_\beta} K_\alpha &= \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \left(-\frac{\partial \eta_\gamma}{\partial z_\beta} \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial \eta_\delta}{\partial t} \right) - (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= -\frac{\partial \eta_\gamma}{\partial z_\beta} \Omega_{\gamma\delta} \frac{\partial^2 \eta_\delta}{\partial t \partial z_\alpha} - (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= -\left(J^T \Omega \frac{\partial J}{\partial t} \right)_{\beta\alpha} - (\alpha \leftrightarrow \beta) \\ &= -\left(J^T \Omega \frac{\partial J}{\partial t} \right)_{\beta\alpha} + \left(\frac{\partial J^T}{\partial t} \Omega^T J \right)_{\beta\alpha}\end{aligned}$$

Et comme $\Omega^T = -\Omega$,

$$= -\frac{\partial}{\partial t} (J^T \Omega J) = -\frac{\partial}{\partial t} \Omega = 0 \quad \checkmark$$

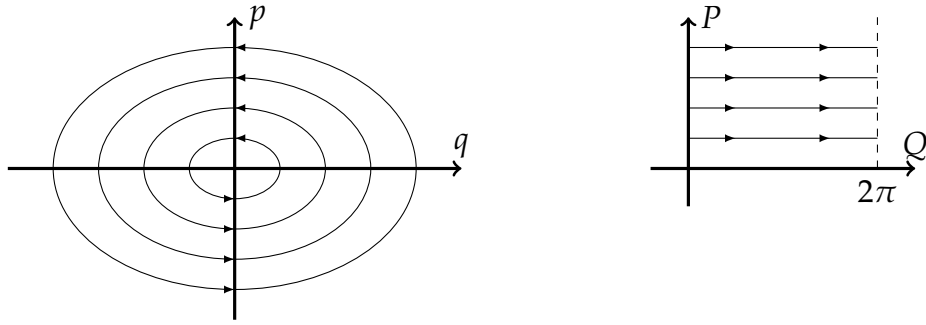
□

Reprenons l'exemple de l'oscillateur harmonique : $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2q^2$. On a vu précédemment qu'en posant $p = f(P) \cos Q$ et $q = f(P) \sin Q$ alors la transformation est canonique pour $f(P) = \sqrt{2m\omega P}$ alors $H = \omega P$. Les équations de Hamilton donnent :

$$\begin{aligned}\dot{P} &= -\frac{\partial H}{\partial Q} = 0 \Rightarrow P = \text{cst} \\ \dot{Q} &= \frac{\partial H}{\partial P} = \omega \Rightarrow Q = \omega t + Q_0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = \sqrt{2m\omega P_0} \cos(\omega t + Q_0) \\ q = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega}} \sin(\omega t + Q_0) \end{cases}$$

Ce qui donne les portraits de phase suivant :



On appelle $(Q, P) = (\theta, I)$ des variables action-angle telles que $H = H(I)$. Cela donne une dynamique simple. Ces variables n'existent que pour des systèmes intégrables.

Fonctions génératrices de transformations canoniques

Soit une transformation canonique $q \rightarrow Q(q, p, t)$, $p \rightarrow P(q, p, t)$. On considère une fonction $F_1 = F_1(q, Q, t)$ et on définit :

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$$

Théorème. La transformation $q_i \rightarrow Q_i$, $p_i \rightarrow P_i$ est canonique avec

$$H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Démonstration. $\{Q, P\} \stackrel{!}{=} 1$ c-à-d $\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial P}{\partial q} &= \frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial^2 F_1}{\partial p \partial Q} + \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial^2 F_1}{\partial q \partial Q} \\ &= 0 + \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial^2 F_1}{\partial Q \partial q} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial Q} = 1 \end{aligned}$$

Les équations de Hamilton sont équivalentes au principe de moindre action. $S = \int (\dot{q}p - H(q, p, t)) dt$. L'action est invariante par addition d'une dérivée totale.

$$\dot{q}_i p_i - H - \frac{dF_1}{dt} = \cancel{\dot{q}_i p_i} - H - \frac{\partial F_1}{\partial t} - \cancel{\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i} - \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = \underbrace{\dot{Q}_i P_i - \left(H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)}_{H'} \quad \square$$

Définition. On appelle F la fonction génératrice de la transformation canonique

Il y en a d'autres engendrées par transformée de Legendre :

$$\begin{aligned} F_2(q_i, P_i) \quad \text{avec} \quad Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i}, \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ F_3(p_i, Q_i) \quad \text{avec} \quad q_i &= -\frac{\partial F_2}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_2}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

Considérons deux exemples :

1. $F_1(q_i, Q_i) = q_i Q_i \Rightarrow p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = Q_i, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_i$
 $\Rightarrow (q, p) \rightarrow (Q, P) = (p, -q)$
2. $F_2(q_i, P_i) = P_i f_i(q) \Rightarrow Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = f_i(q), \quad p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$
 $\Rightarrow (q, p) \rightarrow (Q, P) = \left(f_i(q), \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)_{ij}^{-1} p_j \right)$

On a un changement de coordonnées "à la Lagrange".

5.6 Transformations infinitésimales, symétries et Noether

On se limite aux transformations $\eta_\alpha = \eta_\alpha(z)$ c'est-à-dire $\frac{\partial \eta_\alpha}{\partial t} = 0$

Définition. Une définition est infinitésimale quand :

$$\left. \begin{array}{l} q_i \rightarrow Q_i = q_i + \Delta q_i \\ p_i \rightarrow P_i = p_i + \Delta p_i \end{array} \right\} \eta_\alpha = z_\alpha + \Delta \eta_\alpha$$

À quelle condition cette transformation est-elle canonique ?

$$J_{\alpha\beta} = \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial z_\beta} = \delta_\alpha^\beta + \frac{\partial \Delta \eta_\alpha}{\partial z_\beta} = (\mathbb{1} + \Delta J)_{\alpha\beta}$$

Pour que la transformation soit canonique, on doit avoir $J^T \Omega J = \Omega$ d'où au premier ordre :

$$\begin{aligned} (\mathbb{1} + (\Delta J)^T) \Omega (\mathbb{1} + \Delta J) &\stackrel{!}{=} \Omega \\ \Rightarrow (\Delta J)^T \Omega + \Omega \Delta J &= 0 \Leftrightarrow \Omega_{\alpha\gamma} \frac{\partial \Delta \eta_\gamma}{\partial z_\beta} - (\alpha \leftrightarrow \beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial z_\beta} K_\alpha - \frac{\partial}{\partial z_\alpha} K_\beta = 0 \\ &\Leftrightarrow_{\text{loc.}} K_\alpha = -\frac{\partial}{\partial z_\alpha} G \end{aligned}$$

Donc $\Omega_{\alpha\gamma} \Delta \eta_\alpha = -\frac{\partial}{\partial z_\alpha} G$, ce qui donne une condition pour qu'une transformation infinitésimale soit canonique :

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= \frac{\partial G}{\partial p_i} \\ \Delta p_i &= -\frac{\partial G}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Définition. G est appelée la *fonction génératrice infinitésimale* de la transformation canonique.

Symétrie d'un système

Il y a symétrie si on a $H(q_i, p_i) = H(Q_i, P_i)$.

$$\begin{aligned} H(q_i, p_i) &\stackrel{!}{=} H(Q_i, P_i) = H(q_i + \Delta q_i, p_i + \Delta p_i) \\ &\stackrel{\text{Taylor}}{=} H(q_i, p_i) + \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \Delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \Delta p_i \right) + \dots \\ &= H(q_i, p_i) + \{H, G\} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Ainsi, pour qu'il y ait symétrie, il faut :

$$\boxed{\{H, G\} = 0}$$

Mais, $\frac{dG}{dt} = \{G, H\} \left(+ \frac{\partial G}{\partial t} \right)$ (on se limite à $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$)

Donc il existe une symétrie si et seulement si il existe une fonction G telle que $\frac{d}{dt}G = 0$. C'est le théorème de Noether.

Ici, pour G telle que $\{G, H\} = 0$ c'est-à-dire, pour G se conservant dans le temps, on définit la transformation $\begin{cases} \Delta q_i = \{q_i, G\} \\ \Delta p_i = \{p_i, G\} \end{cases}$. C'est une symétrie.

Par exemple, considérons un système avec impulsion conservée.
 $\frac{d}{dt}p_i = 0$. La charge conservée est alors $G = c_i p_i$.
 Alors une transformation symétrique est :

$$\begin{aligned} \Delta p_i &= \{p_i, G\} = 0 \\ \Delta q_i &= \{q_i, c_j p_j\} = c_i \rightarrow \Delta \vec{q} = \vec{c} \quad (\text{translation}) \end{aligned}$$

Chapitre 6

Introduction à la relativité restreinte

6.1 Principe de relativité

En mécanique (Newton), les lois de la mécanique sont invariantes par transformation de Galilée. Considérons un référentiel \mathcal{R}' se déplaçant à vitesse v selon Ox par rapport à un référentiel \mathcal{R} . Pour un objet qui se déplace dans \mathcal{R}' avec une vitesse c : $x' = ct'$.

Dans \mathcal{R}' , l'objet a une vitesse $\frac{dx'}{dt'} = c$.

Dans \mathcal{R} , l'objet a une vitesse $\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x' + vt) = c + v$.

On a alors l'addition des vitesses.

Problème avec l'électrodynamique

Dans les équations de Maxwell, la lumière (l'onde électromagnétique) se déplace avec une vitesse constante $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$. Cette vitesse est universelle ! On a donc une contradiction. Quelles sont les solutions possibles alors ?

1. Newton et Maxwell sont corrects mais il n'y a pas de principe de relativité, il y a donc un référentiel préféré \mathcal{R} .
2. Il faut modifier Maxwell.
3. Il faut modifier Newton (et les transformations de Galilée).

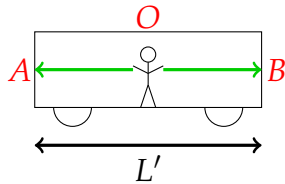
1 et 2 ne peuvent être vraies car on a montré que (Michelson-Morley) la vitesse de la lumière est constante dans tous les référentiels inertiels. La bonne solution est donc 3 pour des vitesses proches de c .

Principes de la relativité restreinte

1. Les lois de la physique (mécanique, électrodynamique) sont identiques dans tous les référentiels inertiels (notamment pour deux observateurs en mouvement rectiligne uniforme l'un contre l'autre).
2. La vitesse de la lumière est constante $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ dans tous les référentiels inertiels (ce qui est contre-intuitif!).

6.2 Conséquences

6.2.1 Relativité de la simultanéité

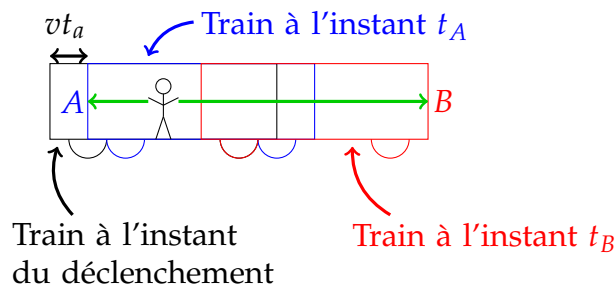


Un observateur au milieu d'un train (réf. \mathcal{R}' qui se déplace à vitesse v par rapport au réf. terrestre \mathcal{R}) déclenche à $t' = 0$ des rayons de lumière vers l'avant et l'arrière du train.

- événement O : déclenchement.
- événement A : le rayon arrive à l'arrière.
- événement B : le rayon arrive à l'avant.

Dans \mathcal{R}' , $\frac{L'}{2} = ct'_A$ et $\frac{L'}{2} = ct'_B$ donc $t'_A = t'_B$.
Les événements A et B sont simultanés.

Dans \mathcal{R} (réf. terrestre) :



- événement A : distance parcourue : $\frac{L}{2} - vt_A = ct_A \Rightarrow t_A = \frac{L}{2(v+c)}$
- événement B : distance parcourue : $\frac{L}{2} + vt_B = ct_B \Rightarrow t_B = \frac{L}{2(v-c)}$

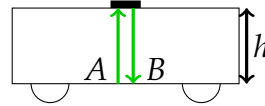
$$t_B \neq t_A : \quad t_B - t_A = \frac{L}{2} \frac{2v}{c^2 - v^2} = \frac{\beta \gamma^2}{c} L \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v = \beta c & (0 \leq \beta \leq 1) \\ \gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \end{cases}$$

- Les deux événements sont simultanés dans \mathcal{R}' mais pas dans \mathcal{R} !
- En mécanique Newtonienne, le problème ne se pose pas, en utilisant la loi d'addition des vitesses, on retrouve bien $t_A = t_B$.
- En relativité, il n'y a pas de temps absolu.
- Pour $v \ll c$, $\beta \ll 1$ et $\gamma \rightarrow 1$: $t_B - t_A \rightarrow 0$ Newton ✓

6.2.2 Dilatation du temps

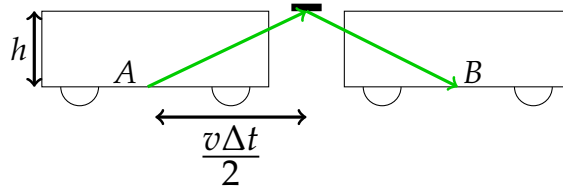
On place une horloge sur un train (réf \mathcal{R}').

- événement A : déclenchement du rayon.
- événement B : détection du rayon.



Dans \mathcal{R} : $2h = c\Delta t'$.

Dans \mathcal{R}' :



$$2\sqrt{h^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} = c\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

On obtient donc :

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' \quad (\gamma \geq 1)}$$

Ainsi, il y a dilatation du temps : une horloge en mouvement paraît ralentie.

Remarques.

- On pourrait penser que cela conduit à un paradoxe : si on a deux horloges allant dans deux directions opposées, laquelle est ralentie ? En fait, elles sont toutes les deux ralenties l'une par rapport à l'autre. Il n'y a pas de contradiction car elles ne se croisent qu'une fois ! *A priori*, on pourrait appliquer ce raisonnement à la situation décrite plus haut, mais la configuration initiale était différente. En

effet, on peut placer plusieurs horloges synchronisées dans le référentiel \mathcal{R} , ce qui brise la symétrie de la situation.

- $\Delta t'$ est appelé le temps propre de l'horloge dans le train et ce temps propre est minimal : $\Delta t' \leq \Delta t$.
- Un autre paradoxe est celui des jumeaux : l'un des deux jumeaux part faire un voyage dans l'espace et revient tandis que l'autre reste sur Terre. Là aussi, la situation n'est pas symétrique, puisque le jumeau parti en voyage revient, ce qui brise la symétrie.
- Enfin, la dilation du temps a été confirmée expérimentalement grâce à l'étude de la désintégration des muons (voir TD).

6.2.3 Contraction des longueurs

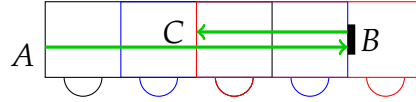
On place une horloge sur un train (réf \mathcal{R}').

- événement A : émission du rayon.
- événement B : réflexion du rayon.
- événement C : détection du rayon.



Dans \mathcal{R}' : $\Rightarrow 2L' = c\Delta t'$

Dans \mathcal{R} :



distance AB : $L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c-v}$
 distance BC : $L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+v}$
 $\left. \begin{array}{l} \text{distance AB : } L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{L}{c-v} \\ \text{distance BC : } L - v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{L}{c+v} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c}\gamma^2$
 En prenant en compte la dilatation du temps $\Delta t = \gamma\Delta t'$, on obtient :

$$L' = \gamma L$$

Ainsi, il y a contraction des longueurs : un objet en mouvement paraît contracté ($L \leq L'$).

Là aussi, si deux objets vont dans des directions opposées, il sont chacun contractés l'un par rapport à l'autre.

6.3 Boost de Lorentz

Plus systématiquement, comment décrire le changement de coordonnées $\mathcal{R} \leftrightarrow \mathcal{R}'$?

On considère un événement A dans l'espace-temps (\mathbb{R}^4) : (t, x, y, z) dans \mathcal{R} et (t', x', y', z') dans \mathcal{R}' . Supposons que \mathcal{R}' se déplace dans la direction (Ox) par rapport à \mathcal{R} . Alors d'après précédemment, pour le point $(x', 0, 0)$

$$\text{dans } \mathcal{R}', \text{ on a : } \begin{cases} x &= vt + \frac{1}{\gamma}x' \\ x' &= -vt' + \frac{1}{\gamma}x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' &= \gamma x - \beta \gamma ct \\ t' &= \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\gamma}x - x' \right) = \gamma t - \frac{1}{c} \beta \gamma x \end{cases}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma x - \beta \gamma (ct) \\ ct' &= \gamma (ct) - \beta \gamma x \end{aligned}}$$

Ou plus formellement :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est ce qu'on appelle une transformation de Lorentz (notamment, boost de Lorentz).

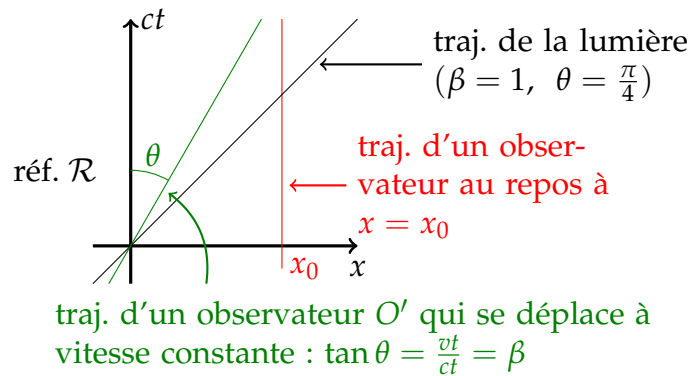
Remarques.

- Dans la limite, $v \ll c$ ($\beta \ll 1$), on retrouve bien une transformation de Galilée : $\begin{cases} x' = x - vt + \mathcal{O}(\beta^2) \\ t' = t + \mathcal{O}(\beta^2) \end{cases}$
- L'espace-temps est modélisé par \mathbb{R}^4 avec 4 coordonnées : ct, x, y, z . On peut en effet, multiplier t par c car c est une constante universelle et cela permet de garder l'homogénéité : $[ct] = [x]$

Dès lors, comment représenter les transformations de coordonnées ?

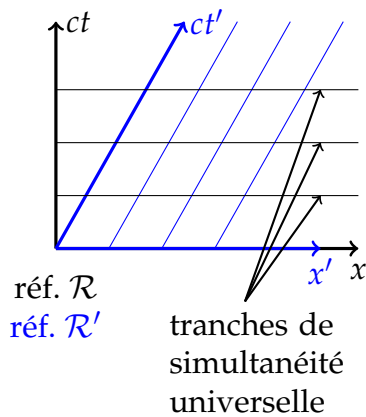
Diagrammes de Minkowski (diagrammes d'espace-temps)

Les diagrammes de Minkowski sont des diagrammes $ct - x$, c'est-à-dire représentant ct en fonction de x .



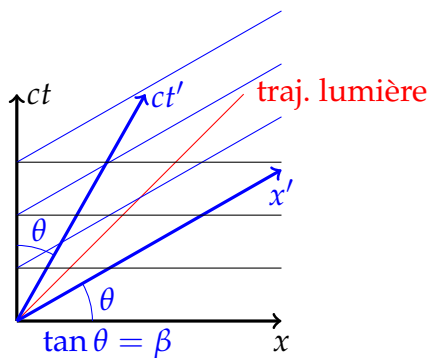
Quel est le référentiel \mathcal{R}' de l'observateur O' (coordonnées ct' et x') ?

D'abord, pour Newton : $\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$



axe t : endroit où $x = 0$
 axe x : endroit où $t = 0$
 axe x' : endroit où $t' = 0 = t$
 axe t' : endroit où $x' = 0 \Leftrightarrow x = vt$

En relativité :



axe t' : $x' = 0 \Leftrightarrow x = \beta ct = vt$ (traj. obs)
 axe x' : $t' = 0 \Leftrightarrow ct = \beta x$

Les lignes noires sont les tranches de simultanéité dans \mathcal{R} alors que les lignes bleues sont les tranches de simultanéité dans \mathcal{R}' .

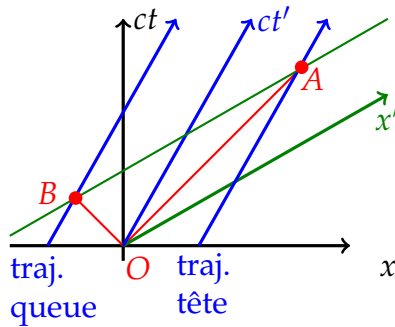
Ces diagrammes montrent qu'il n'existe pas d'observateur à $v \geq c$ dans

un référentiel inertiel.

Illustration des effets de la relativité restreinte

A) Relativité de la simultanéité

Reprenons l'exemple des deux rayons émis par un observateur situé au milieu du train.



événement O : émission
 événement A : détection tête
 événement B : détection queue
 Dans \mathcal{R} , $t_B \leq t_A$
 Dans \mathcal{R}' , $t'_B = t'_A$

Par le calcul :

Dans \mathcal{R}'

O : (0,0)

A : $(ct'_A = \frac{L'}{2}, \frac{L'}{2})$

B : $(ct'_B = \frac{L'}{2}, -\frac{L'}{2})$

Dans \mathcal{R}

O : (0,0)

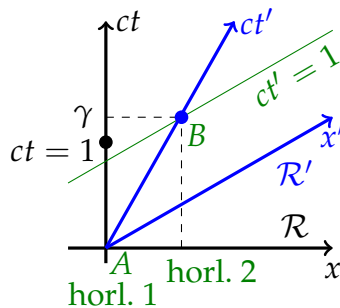
A : $ct_A = \gamma ct'_A + \gamma \beta x'_A = \frac{L'}{2} \gamma (1 + \beta)$

B : $ct_B = \gamma ct'_B + \gamma \beta x'_B = \frac{L'}{2} \gamma (1 - \beta)$

On a $t_A - t_B = \frac{1}{c} \beta \gamma L' \checkmark$ (avec $L' = \gamma L$)

B) Dilatation du temps

On reprend l'exemple de l'horloge dans le train qui passe devant deux horloges dans \mathcal{R} .



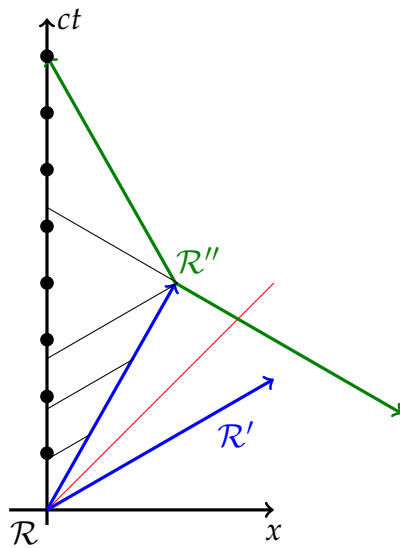
événement A : le train passe l'horloge 1
 événement B : le train passe l'horloge 2

Par le calcul :

Dans \mathcal{R}'	$\xrightarrow[\mathcal{R}' \rightarrow \mathcal{R}]{\text{traduction}}$	Dans \mathcal{R}
$ct'_A = 0, x'_A = 0$		$ct_A = \gamma ct'_A + \beta \gamma x'_A = 0$
$ct'_B = 1, x'_B = 0$		$ct_B = \gamma ct'_B + \beta \gamma x'_B = \gamma > 1$

L'horloge dans \mathcal{R}' est ralentie dans \mathcal{R} .

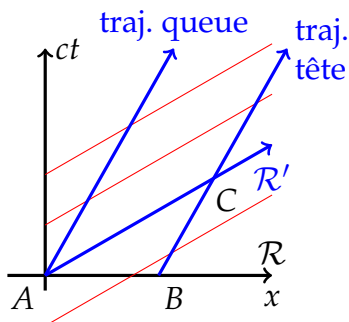
Reprenons maintenant l'exemple du paradoxe des jumeaux :



Le jumeau dans la fusée change de référentiel.
 \Rightarrow change sa notion de simultanéité.
 \Rightarrow quand il rentre, il sera plus jeune.

C) Contraction des longueurs

Dans \mathcal{R} , on pose une règle dont les extrémités A et B coïncident avec la queue et la tête du train lors de son passage devant la règle.



$AB = L$
 $AC = L'$
 En rouge sont les tranches de simultanéité dans \mathcal{R}' .

Par le calcul :

Dans \mathcal{R}		Dans \mathcal{R}'
$A : (0,0)$		$A : (0,0)$
$B : (0,L)$	$\xrightarrow[\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}']{\text{traduction}}$	$B : (-\beta\gamma L, \gamma L)$
$C : (ct, L + \beta ct)$		$C : (0, L')$

Comment visualiser la contraction ?

En fait, la paroi du train va paraître contractée, mais comme la distance de la tête et de la queue à l'observateur varie, la lumière ne va pas mettre le même temps à arriver jusqu'à l'observateur. L'observateur va donc voir le train comme si il avait subi une rotation ! Pour plus d'info, vous pouvez aller voir sur spacetime.travel.org.

D) Addition des vitesses

On considère une particule qui se déplace dans \mathcal{R} à vitesse constante u' . On a $x' = u't'$. Mais alors, quelle est sa vitesse dans \mathcal{R} ?

$$u = \frac{x}{t} = \frac{\gamma x' + \beta \gamma ct'}{\gamma t' + \beta \frac{\gamma}{c} x'} = \frac{(\gamma u' + \beta \gamma c)t'}{(\gamma + \beta \frac{\gamma}{c} u')t'} = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Donc :

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$$

Remarques.

- Pour u' et v tous deux inférieurs à c , alors $u \leq c$.
- Si $u' = c$ alors $u = c$. La vitesse de la lumière est égale à c dans tout référentiel.

6.4 Géométrie de l'espace-temps

L'espace-temps est représenté par \mathbb{R}^4 et est aussi appelé (espace de Minkowski).

On notera les coordonnées d'un événement $\{ct, x, y, z\}$ par X^μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$. On a $X^0 = ct$, $X^1 = x$, $X^2 = y$, $X^3 = z$. X^μ est un quadri-vecteur.

Intervalle invariant (d'espace-temps)

Définition. Pour deux événements $A : (ct_1, x_1, y_1, z_1)$ et $B : (ct_2, x_2, y_2, z_2)$, on définit :

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

$$(\Delta \ell)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

les distances temporelle et spatiale (qui dépendent de l'observateur).

Théorème. L'intervalle invariant défini comme :

$$(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta \ell)^2$$

est indépendant du référentiel !

Démonstration.

$$c^2 \Delta t'^2 = (\gamma c \Delta t - \gamma \beta \Delta x)^2$$

$$\Delta x'^2 = (\gamma \Delta x - \gamma \beta c \Delta t)^2$$

Donc :

$$c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 = \Delta t^2 \underbrace{(\gamma^2 c^2 - \gamma^2 c^2 \beta^2)}_{c^2} - \Delta x^2 \underbrace{(\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2)}_1 + \Delta t \Delta x (\cancel{\gamma^2 \beta c} - \cancel{\gamma^2 \beta c})$$

$$= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2$$

□

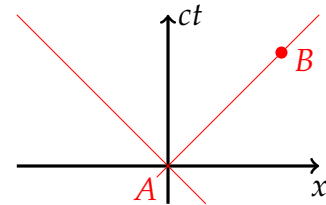
Il y a alors 3 cas : Δs^2 peut être soit négatif, soit positif, soit nul (...No shit Sherlock) :

— $\Delta s^2 = 0$ est un intervalle genre lumière.

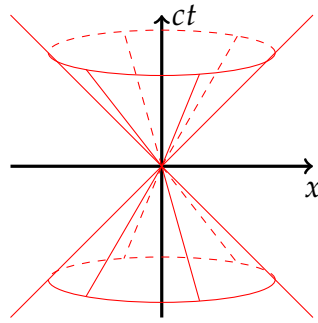
$$c^2 \Delta t^2 = \Delta \ell^2 \Rightarrow c \Delta t = \pm \Delta \ell$$

Δs est la distance entre deux événements.

En rouge sont tous les événements distance nulle de A.

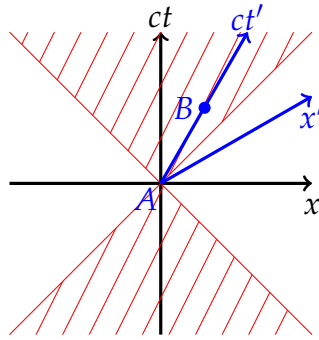


A et B peuvent être connectés par un signal de lumière. Par exemple, si A est l'émission d'un photon et B sa détection, on a $\frac{\Delta \ell}{\Delta t} = c$ pour tout observateur (la vitesse de la lumière est constante).



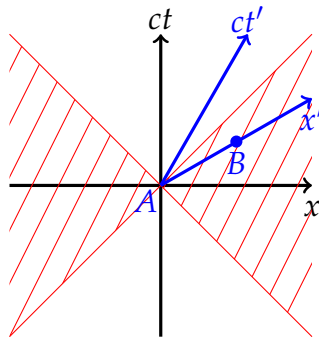
surface $c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$
appelée cône de lumière

- $\Delta s^2 > 0$ est un intervalle genre temps.
 $c^2\Delta t^2 > \Delta \ell^2$ notamment $\Delta t \neq 0$ pour tout observateur ! Donc, il n'existe pas de référentiel pour lequel les deux événements sont simultanés, mais, il existe un référentiel pour lequel les deux événements se passent au même endroit ($\Delta \ell = 0$).



La partie hachurée représente les événements à distance positive. Dans \mathcal{R}' , les événements A et B se passent au même endroit. Si $\Delta t > 0$ dans un référentiel, $\Delta t > 0$ dans tout référentiel.

- $\Delta s^2 < 0$ est un intervalle genre espace.
 $c^2\Delta t^2 < \Delta \ell^2$ et donc il n'existe pas de référentiel dans lequel $\Delta \ell = 0$, mais il existe un référentiel dans lequel $\Delta t = 0$, c'est-à-dire dans lequel les deux événements se passent simultanément.



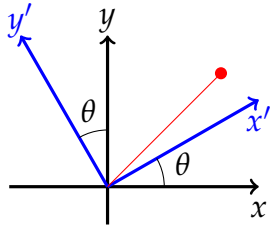
Dans \mathcal{R}' , A et B sont simultanés

Géométrie euclidienne et hyperbolique

L'intervalle d'espace-temps est une notion de "distance" dans \mathbb{R}^4 . L'analogue dans \mathbb{R}^3 est la distance spatiale qui est une norme définie positive :

$$\Delta \ell^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = \|\vec{X}_2 - \vec{X}_1\|^2.$$

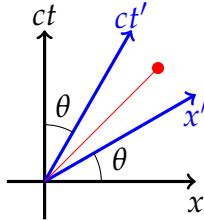
La distance dans \mathbb{R}^3 est invariante par rotation :



$\vec{X} \rightarrow R\vec{X}$ avec $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $R.R^T = \mathbb{1}$ et $\det R = 1$.

La rotation préserve $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$

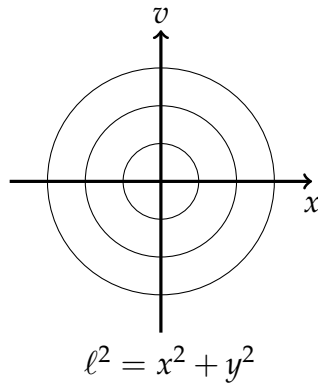
En Minkowski :



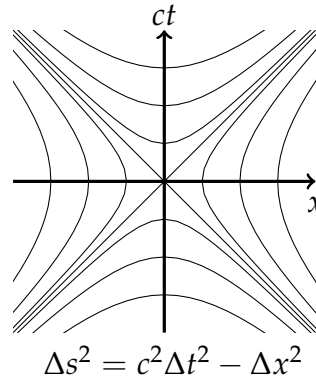
Le boost de Lorentz préserve $c^2 t^2 - x^2 = c^2 t'^2 - x'^2$.
Géométrie hyperbolique.

Points à égale distance de l'origine :

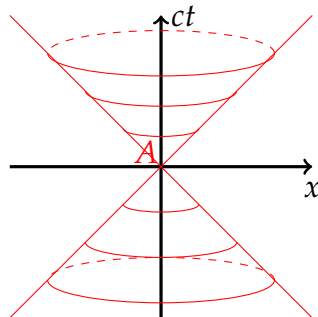
Espace euclidien



Espace de Minkowski



Causalité



Cône de lumière par rapport à un événement A .

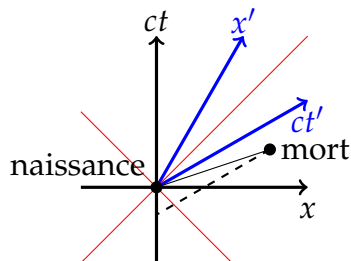
- Ce qui est dans le cône supérieur est le futur : ce sont tous les événements qu'on peut joindre à partir de A à un instant $t > 0$.
- Ce qui est dans le cône inférieur est le passé : ce sont les événements à partir desquels, on peut joindre A .
- À l'extérieur sont tous les événements qu'on, et à partir desquels, on ne peut pas joindre A . Cette région est appelée *région causalement déconnectée*.

Rien ne peut se déplacer plus vite que la lumière :

- Il n'existe pas de référentiel qui se déplace à $v > c$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Leftrightarrow \beta < 1$$

- Problème avec la causalité :



On a une vraie contradiction : on pourrait envoyer des messages dans le passé

- Plus tard, (avec la dynamique relativiste), on ne peut pas accélérer une particule à vitesse $v > c$.

Chapitre 7

Transformations de Lorentz

7.1 Le groupe de Lorentz

L'espace-temps est représenté par un vecteur $X^\mu \in \mathbb{R}^4$, $\mu = 0,1,2,3$.
La distance à l'origine (norme de X) est :

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2$$

Cette distance est invariante par changement de référentiel (équivalent à la constance de la vitesse de la lumière).

Définition. On définit :

$$||X|| = X^\mu g_{\mu\nu} X^\nu \text{ avec } g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$g_{\mu\nu}$ est appelée *métrique de l'espace Minkowski*

Plus généralement, une transformation de Lorentz est un changement de coordonnées qui préserve cette norme.

Postulat relativiste. Les lois de la physique fondamentale sont invariantes par transformation de Lorentz.

Quelle est alors la condition pour qu'un changement de coordonnées conserve la norme ?

Un changement de coordonnées s'écrit : $X^\mu \rightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$

On doit alors avoir : $X'^\mu g_{\mu\nu} X'^\nu = X^\rho \underbrace{\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma}_{g_{\rho\sigma}} X^\sigma = X^\mu g_{\mu\nu} X^\nu$

Ainsi la condition pour la matrice Λ^μ_ν est :

$$\Lambda^\mu_\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma = g_{\rho\sigma}, \text{ ou matriciellement : } \Lambda^T g \Lambda = g$$

C'est une généralisation des rotations $\Lambda^T \Lambda = \mathbb{1}$

Voici quelques exemples de telles matrices :

$$- \Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce sont les boosts de Lorentz. La deuxième matrice est exprimée en terme de rapidité.

$$- \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ avec } R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / R^T R = \mathbb{1} \text{ et } \det R = 1.$$

Ce sont les rotations orthogonales sur \mathbb{R}^3 . Ainsi pour une rotation

$$\text{en } (x, y), \text{ on a : } R = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toute transformation de Lorentz est un combinaison (c'est-à-dire produit) de rotations et de boosts. Ces transformations forment un groupe, notamment si Λ_1 et Λ_2 sont des transformations de Lorentz alors $\Lambda_1 \Lambda_2$ est aussi une transformation de Lorentz.

Démonstration.

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda_1^T g \Lambda_1 = g \\ \Lambda_2^T g \Lambda_2 = g \end{array} \right\} \Rightarrow (\Lambda_1 \Lambda_2)^T g \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \underbrace{\Lambda_1^T g \Lambda_1}_g \Lambda_2 = g \quad \square$$

Ce groupe est noté $O(1,3)$.

On remarquera que $\Lambda^T g \Lambda = g \Rightarrow \det \Lambda = \pm 1$. On va se restreindre au choix $\det \Lambda = 1$.

Les symétries fondamentales d'une théorie relativiste incluent également les translations $X^\mu \rightarrow X'^\mu = X^\mu + C^\mu$ (au-delà des transformations de Lorentz). On obtient alors le groupe $SO(1,3) \ltimes T^4$.

Si on ajoute maintenant le renversement du temps T et la parité P , on obtient le groupe complet des isométries de l'espace-temps de Minkowski appelé groupe de Poincaré noté $\mathbb{R}^4 \rtimes O(1,3)$.

7.2 Quadri-vecteurs covariants et contravariants

Définition. Un *quadri-vecteur contravariant* V^μ se transforme par transformation de Lorentz en :

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu$$

Le premier exemple de vecteur contravariant est tout simplement $V^\mu = X^\mu$!

Considérons maintenant une onde électromagnétique dans un référentiel \mathcal{R}' .

$\Phi(t', x') = \Phi_0 \cos(\omega' t' - \vec{k}' \cdot \vec{x}')$ ou de manière plus compacte :

$\Phi(t', x') = \Phi_0 \cos(k'^\mu g_{\mu\nu} X'^\nu)$ avec $k'^\mu = (\frac{\omega'}{c}, k'_x, k'_y, k'_z)$ appelé quadri-vecteur fréquence.

Dans \mathcal{R} , $\Phi(t, x) = \Phi_0 \cos(\omega' t'(t, x) - \vec{k}' \cdot \vec{x}'(t, x))$. Par transformation de Lorentz, on a :

$$\begin{aligned} X'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu X^\nu \\ k'^\nu &= \Lambda^\mu_\nu k^\nu \end{aligned}$$

Pour l'onde : $\Phi_0 \cos(k'^\mu g_{\mu\nu} X'^\nu) = \Phi_0 \cos(k^\mu g_{\mu\nu} X^\nu) = \Phi_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})$

Donc le quadri-vecteur $k^\mu(\omega/c, \vec{k})$ est un vecteur contravariant. Sa norme est : $k^\mu g_{\mu\nu} k^\nu = \frac{\omega^2}{c^2} - |\vec{k}|^2 = 0$ car $\omega = c|\vec{k}|$. La vitesse de l'onde est donc c dans tout référentiel.

Définition. On définit le *vecteur covariant* par :

$$V_\mu = g_{\mu\nu} v^\nu \Leftrightarrow (g)^{\mu\nu} V_\nu = V^\mu \quad (\text{car } g^{-1} = g)$$

Par exemple, $X_\mu = (ct, -x, -y, -z)$.

Comment se transforme V_μ par transformation de Lorentz ?

$$V'_\mu = g_{\mu\nu} V'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho V^\rho = \underbrace{g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho g^{\rho\sigma}}_{\tilde{\Lambda}_\mu^\sigma} V_\sigma = \tilde{\Lambda}_\mu^\sigma V_\sigma$$

Matriciellement : $\tilde{\Lambda} = g \Lambda g = (\Lambda^T)^{-1}$

Définition. Un *quadri-vecteur covariant* W_μ se transforme par transformation de Lorentz en :

$$W'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu W_\nu$$

Par exemple, pour V^μ contravariant, $g_{\mu\nu}V^\nu$ est covariant.

Sinon, l'opérateur $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\partial_t \\ \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ se transforme en $\partial'_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu{}^\nu \partial_\nu$ (voir

TD).

Le produit scalaire $V^\mu g_{\mu\nu} Z^\nu = V_\nu Z^\nu = V^\mu Z_\mu = V_\nu g^{\nu\mu} Z_\mu$ est invariant par changement de référentiel.

Attention à la convention de sommation d'Einstein : la sommation sur un indice est sous-entendue si l'indice apparaît deux fois dans un terme (une fois en haut et une fois en bas !).

On a une équation physique (équation covariante) qui s'applique dans tout référentiel : $k^\mu g_{\mu\nu} k^\nu = 0 \Leftrightarrow k^\mu k_\mu = 0$ ($\omega^2/c^2 - \vec{k}^2$).

7.3 Tenseurs

Définition. Un tenseur contravariant de rang 2 $T^{\mu\nu}$ se transforme par transformation de Lorentz en :

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}$$

Ceci est utilisé en électrodynamique ou en gravitation.

Chapitre 8

Mécanique relativiste

8.1 Temps propre

En formulation newtonienne, la trajectoire d'une particule est $\vec{X}(t)$. En relativité, c'est toujours une bonne notation mais ce n'est pas très pratique pour le changement de référentiel $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'(\vec{x}, t)$, $t \rightarrow t'(\vec{x}, t)$.

On cherche une formulation plus adaptée.

Le référentiel \mathcal{S} associé à une particule n'est pas forcément un référentiel inertiel. Mais à tout moment, on peut approximer \mathcal{S} par un référentiel inertiel \mathcal{R}' .

La distance (invariante) entre deux points adjacents est :

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t'^2 - \underbrace{\Delta x'^2}_{=0 \text{ dans } \mathcal{R}'} = c^2 \Delta t'^2.$$

$$\text{Dans } \mathcal{R} : \Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2.$$

Définition. t' est appelé temps propre (mesuré par la particule). Dans la suite, il sera noté τ . On a :

$$\Delta \tau = \frac{1}{c} \Delta s$$

$$\text{Dans } \mathcal{R}, \text{ on a } \Delta \tau = \frac{1}{c} \Delta s = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2}.$$

$$\text{En infinitésimal : } d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \frac{1}{c} = \frac{1}{\gamma} dt.$$

On retrouve ici la dilatation du temps : $dt = \gamma d\tau$.

Pour calculer τ le long de sa trajectoire, on intègre : $\int d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{\gamma} dt$.

Ceci nous permet de traiter le paradoxe des jumeaux : pour celui resté sur Terre, $v = 0$ donc $\gamma = 1$. Pour celui qui voyage : $v \neq 0$ donc $\gamma > 1$. Ainsi, son temps propre sera inférieur à celui de son frère resté sur Terre.

Ainsi, la bonne notion de trajectoire est de considérer $X^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} ct(\tau) \\ x(\tau) \\ y(\tau) \\ z(\tau) \end{pmatrix}$

au lieu de $x(t), y(t), z(t)$.

On a ainsi accès à :

- La position $X^\mu(\tau)$.
- La vitesse relativiste : $U^\mu = \frac{d}{d\tau} X^\mu(\tau)$.
- L'accélération relativiste : $A^\mu = \frac{d^2}{d\tau^2} X^\mu(\tau)$.
- Ce qui donne l'équation de Newton (F^μ est appelé quadri-force) :

$$m \frac{d}{d\tau} U^\mu = F^\mu$$

Cela permet également de simplifier les changements de référentiels $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$:

$$X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu, \quad \tau' = \tau$$

8.2 Quadri-vitesse

La vitesse newtonienne est $\frac{d\vec{x}}{dt}$ (changement de réf. : $\frac{d\vec{x}'}{dt'}, \dots$).

Définition. On définit la *vitesse relativiste* par :

$$U^\mu = \frac{d}{d\tau} X^\mu(\tau) = \begin{pmatrix} c \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \end{pmatrix} = \frac{dt}{d\tau} \begin{pmatrix} c \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \vec{v} \end{pmatrix} \quad \text{car } \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

Remarques.

- La différence avec Newton est le facteur γ dans le terme $\gamma \vec{v}$.
- U^μ est un quadri-vecteur contravariant, et par changement de référentiel : $U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$ (car $\tau = \tau'$).
- La norme de U^μ est :

$$\begin{aligned} U^\mu U_\mu &= (U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 \\ &= c^2 \gamma^2 - \gamma^2 v^2 = c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = c^2 \end{aligned}$$

Cette norme est constante ! Elle est indépendante du référentiel. Cela implique que U^μ ne porte que 3 composantes indépendantes :

$$U^0 = \sqrt{c^2 + \vec{U}^2} \quad \left(U^\mu = \begin{pmatrix} U^0 \\ \vec{U} \end{pmatrix} \right).$$

- Notamment dans le référentiel au repos : $U^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix}$
- On peut dériver cette vitesse et obtenir la quadri-accélération :

$$\frac{d}{d\tau} U^\mu = \frac{d^2}{d\tau^2} X^\mu$$

8.3 Énergie-impulsion

Définition. On définit la quadri-impulsion :

$$P^\mu = mU^\mu$$

Remarques.

- Plus tard, on verra que le théorème de Noether implique que P^μ est conservé dans une théorie relativiste ! Notamment pour un système à N particules : $P_1^\mu + P_2^\mu + P_3^\mu + \dots = cst.$
- La partie spatiale : $\vec{p} = m\vec{U} = m\gamma\vec{v}$ est l'impulsion relativiste. $m\gamma$ est la masse relativiste ($v \rightarrow c \Rightarrow m \rightarrow \infty$).
- La partie temporelle : $P^0 = m\gamma c = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots \right) = \frac{1}{c}E$
 Pour cela, on développe γ en série entière... Le premier terme est une constante, le deuxième terme est l'énergie cinétique.

Définition. P^μ est appelé *quadri-vecteur énergie-impulsion* car :

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{P} \end{pmatrix}$$

L'énergie est :

$$E = cP^0 = m\gamma c^2$$

Dans le référentiel au repos ($v = 0$, $\gamma = 1$) :

$$E = mc^2$$

L'énergie relativiste est conservée !

D'après précédemment, $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$ donc la masse est "contenue" dans l'énergie.

En formulation newtonienne, l'énergie et la masse sont conservées. En formulation relativiste, l'énergie est conservée mais la masse et l'énergie cinétique sont échangeables !

P^μ est un quadri-vecteur ($P^\mu = mU^\mu$ avec $m' = m$ quand $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$) et on a :

$$P'^\mu = \Lambda^\mu_\nu P^\nu$$

La norme $P^\mu P_\mu$ est indépendante du référentiel c'est-à-dire $P'_\mu P'^\mu = P_\mu P^\mu$ etc.

Dans le référentiel au repos :

$$U^\mu = \begin{pmatrix} c \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow P^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow P^\mu P_\mu = m^2 c^2$$

Dans le référentiel terrestre :

$$P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix} \Rightarrow P^\mu P_\mu = \frac{1}{c^2} E^2 - \vec{p}^2$$

Donc,

$$E^2 = (mc^2)^2 + (\vec{p}c)^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2$$

Pour les particules de masse nulle ($m = 0$), $P^\mu P_\mu = 0$. L'impulsion P^μ est sur le cône de lumière donc la particule se propage à la vitesse de la lumière ! De plus, on a $E = |\vec{p}|c$ et $P^\mu = \begin{pmatrix} \frac{E}{c} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$.

Remarques. Attention ! Quand $v \rightarrow c$:

- $P^\mu = mU^\mu$ est indéterminé ($m \rightarrow 0$, $U^\mu \rightarrow \infty$)
- Énergie $E = m\gamma c^2$ ($m \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow \infty$)
- Énergie dans le référentiel au repos : $E = mc^2$ (mais $m \rightarrow 0$. Pour une particule de masse nulle, il n'y a pas de référentiel au repos !)

8.4 Équation de Newton relativiste

$$\frac{d}{d\tau} P^\mu = F^\mu$$

Pour un changement de référentiel, il suffit de mettre des ' à τ , P et F !

- Partie spatiale : $\frac{d}{d\tau} \vec{P} = \vec{F}$ or $\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}$ donc :

$$\frac{d}{dt} (m\gamma \vec{v}) = \frac{1}{\gamma} \vec{F}$$

- Partie temporelle : $\frac{d}{d\tau} P^0 = F^0$ changement d'énergie...

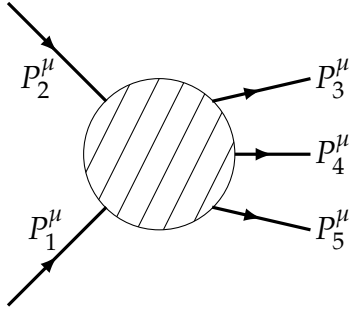
Quelle conséquence peut-on tirer de ces équations de Newton modifiées ?

$$P^\mu P_\mu = m^2 c^2 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} (P^\mu P_\mu) = 0 = 2P^\mu \frac{d}{d\tau} P_\mu$$

Ceci implique que $\frac{d}{d\tau}P^\mu \perp P_\mu$. Donc $\frac{d}{d\tau}P^\mu$ ne porte que 3 composantes indépendantes. Notamment, cela impose une condition sur la quadri-force :

$$P_\mu F^\mu = 0$$

8.5 Application aux collisions

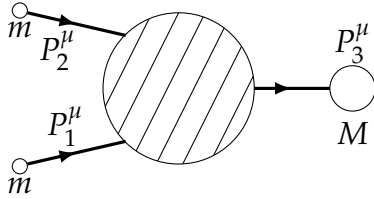


Conservation de l'impulsion P^μ :

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_3^\mu + P_4^\mu + P_5^\mu$$

$$(1) + (2) \rightarrow (3) + (4) + (5)$$

Collision inélastique



Dans \mathcal{R}' (réf. au repos de la particule (3)).

$$P_3^\mu = \begin{pmatrix} Mc \\ \vec{0} \end{pmatrix}, P_1^\mu = \begin{pmatrix} \gamma_1 mc \\ \gamma_1 m \vec{v}_1 \end{pmatrix}, P_2^\mu = \begin{pmatrix} \gamma_2 mc \\ \gamma_2 m \vec{v}_2 \end{pmatrix}$$

$$P_1'^\mu + P_2'^\mu = P_3'^\mu \Rightarrow \gamma_1 m \vec{v}_1 + \gamma_2 m \vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v}_1 = -\vec{v}_2 \text{ et } \gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$$

$$\text{Donc, } Mc = \gamma_1 mc + \gamma_2 mc = 2\gamma mc$$

Ainsi :

$$M = 2\gamma m$$

L'énergie cinétique initiale des particules se transforme en masse ! On trouve cette configuration dans les collisionneurs.

Si on se place dans le référentiel au repos de la particule (2) (expérience dite "cible fixe"), on a :

$$P_2^\mu = \begin{pmatrix} mc \\ \vec{0} \end{pmatrix}, P_1^\mu = \begin{pmatrix} \gamma_0 mc \\ \gamma_0 m \vec{v}_0 \end{pmatrix} \text{ On fait la traduction } \mathcal{R}' \leftrightarrow \mathcal{R} \text{ par transformation de Lorentz :}$$

$$P_2^\mu = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\beta_2 \gamma_2 & 0 & 0 \\ -\beta_2 \gamma_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_2'^\mu \text{ etc...}$$

