Le théorème de Noether.

On considère un lagrangien possédant une symétrie infinitésimale :

$$q_i' = q_i + \epsilon g_i(q,t)$$

Cela se traduit au niveau du Lagrangien par l'existence d'une quantité $\mathcal{F}(q,t)$ telle que :

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}(q+\delta q, \dot{q}+\delta\dot{q}, t) - \mathcal{L}(q,\dot{q},t) = \epsilon\frac{d\mathcal{F}(q,t)}{dt} + o(\epsilon)$$

Le Théorème de Noether stipule alors que la quantité :

$$Q = \sum_i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i} g_i - \mathcal{F}$$

est conservée au cours de la dynamique. On appelle charge de Noether cette grandeur associée à la symétrie de $\mathcal{L}$

Application : Vecteur de Runge-Lentz

Pour le cas du problème de Kepler :

$$\mathcal{L} = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{k}{r}$$

On considère la transformation :

$$\left\{ q_i{}' = q_i + \epsilon m \left(\dot{q}_i q_k - \frac{1}{2} q_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{r}\vec{v} \right) \right\}$$

$$\left\{ \dot{q}_i{}' = \dot{q}_i + \epsilon m \left(\frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_k - \frac{\delta_{ik}}{2} \vec{v}^2 - \frac{k}{2m} \frac{q_i q_k}{r^3} + \frac{k}{2m} \frac{\delta_{ik}}{r} \right) \right\}$$

$$\left\{ \mathcal{F} = \frac{mk\vec{r}.\vec{e}_k}{r} \right\}$$

$$Q_{RL} = m^2 \sum_i \dot{q}_i \left(\dot{q}_i q_k - \frac{1}{2} q_i \dot{q}_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{r}\vec{v} \right) - \frac{mk\vec{r}.\vec{e}_k}{r} = [m\vec{v} \wedge (\vec{r} \wedge m\vec{v})].\vec{e}_k - \frac{mk\vec{r}.\vec{e}_k}{r}$$

Détails du calcul pour le vecteur de Runge-Lentz

Transformation de la vitesse :

$$x' = x + m\epsilon\left(v_x x - \frac{1}{2}x v_x - \frac{1}{2}\vec{r}\vec{v}\right)$$

$$v_x{}' = v_x + m\epsilon\left(\dot{v_x}x + v_x v_x - \frac{1}{2}v_x v_x - \frac{1}{2}x\dot{v_x} - \frac{1}{2}\vec{r}\dot{\vec{v}} - \frac{1}{2}\vec{v}^2\right)$$

$$v_x{}' = v_x + m\epsilon\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{k}{m}\frac{x}{r^3}\right)x + \frac{1}{2}v_x v_x - \frac{1}{2}\vec{r}\left(-\frac{k}{m}\frac{\vec{r}}{r^3}\right) - \frac{1}{2}\vec{v}^2\right)$$

$$\boxed{v_x{}' = v_x + m\epsilon\left(\frac{1}{2}v_x v_x - \frac{1}{2}\vec{v}^2 - \frac{kx^2}{2mr^3} + \frac{k}{2mr}\right)}$$

Détails du calcul pour le vecteur de Runge-Lentz

Transformation de l'énergie cinétique :

$$\frac{m\vec{v}'^2}{2} = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{m^2\epsilon}{2}\left[\begin{matrix}\left(v_x v_x - \vec{v}^2 - \frac{kx^2}{mr^3} + \frac{k}{mr}\right)v_x + \\ \left(v_y v_x - \frac{kxy}{mr^3}\right)v_y + \\ \left(v_z v_x - \frac{kxz}{mr^3}\right)v_y\end{matrix}\right]$$

$$\boxed{\frac{m\vec{v}'^2}{2} = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \epsilon\left[-\frac{mkx}{2r^3}(\vec{r}\vec{v}) + \frac{mkv_x}{2r}\right]}$$

Détails du calcul pour le vecteur de Runge-Lentz

Transformation de l’énergie potentielle :

$$\frac{k}{r'} = \frac{k}{r} - \frac{k\vec{r}}{r^3}.(\vec{r}' - \vec{r})$$

$$\frac{k}{r'} = \frac{k}{r} - \frac{mk\epsilon}{r^3}\begin{bmatrix} \left(v_x x - \frac{1}{2}xv_x - \frac{1}{2}\vec{r}\vec{v}\right)x + \\ \left(v_y x - \frac{1}{2}yv_x\right)y + \\ \left(v_z x - \frac{1}{2}zv_x\right)z \end{bmatrix}$$

$$\frac{k}{r'} = \frac{k}{r} - \frac{mk\epsilon}{r^3}\left[\frac{x}{2}(xv_x + yv_y + zv_z) - \frac{v_x r^2}{2}\right]$$

$$\boxed{\frac{k}{r'} = \frac{k}{r} - \frac{mk\epsilon}{r^3}\left[\frac{x}{2}(\vec{r}\vec{v}) - \frac{v_x r^2}{2}\right]}$$

Détails du calcul pour le vecteur de Runge-Lentz

Transformation du Lagrangien :

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \left[\frac{mkv_x}{2r} - \frac{mkx}{2r^3}(\vec{r}\vec{v}) + - \frac{mkx}{2r^3}(\vec{r}\vec{v}) + \frac{mkv_x}{2r} \right]$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \left[\frac{mk}{r} \left(v_x - \frac{\vec{r}\vec{v}}{r^2} \right) \right]$$

$$\boxed{\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \epsilon \frac{d}{dt}\left[\frac{mkx}{r} \right]}$$

Détails du calcul pour le vecteur de Runge-Lentz

Charge de Noether :

$$\sum_i \dot{q}_i \left(\dot{q}_i x - \frac{1}{2} q_i v_x - \frac{1}{2} \delta_{ik} \vec{r}\vec{v} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} x\left({v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2\right) \\ -\frac{1}{2}\left(v_x x v_x + v_y y v_x + v_z z v_x\right) \\ -\frac{1}{2} v_x\left(x v_x + y v_y + z v_z\right) \end{bmatrix}$$

$$= x\left({v_y}^2 + {v_z}^2\right) - v_x\left(y v_y + z v_z\right)$$

$$\boxed{= \vec{v} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{v}).\vec{e}_x}$$