

LP02 – GRAVITATION.

24 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L2

Bibliographie

✦ *Physique tout en un PCSI* **Salamito**

✦ *Physique tout en un PC* **Sanz**

✦ *Mécanique PCSI-MPSI* **Brasselet**

✦ *Mécanique du point* **BFR**

✦ *BUP 858 : De Kepler à Newton*

Force de marée

Problème à deux corps

Approche historique

Prérequis

- Mécanique du point (PFD, TMC)
- Forces conservatives, forces centrales
- Electrostatique
- Ref non galiléen (si marée)
- Repères tournants

Expériences

- ☞ Faire tomber n'importe quoi (une pomme pour le style peut être?)
- ☞ simulations

Table des matières

1	La force gravitationnelle	2
1.1	Les travaux de Newton	2
1.2	Analogie avec l'électrostatique	3
1.2.1	Définition du champ gravitationnel	3
1.3	Champ gravitationnel pour une distribution continue de masse	3
1.3.1	Théorème de Gauss	4
1.3.2	Application 1 : Distribution sphérique	4
1.3.3	Application 2 : le mer de Lindenbrok	5
2	Trajectoire : problème à deux corps	6
2.1	Position du problème : réduction canonique	6
2.2	Planéité de la trajectoire	8
2.3	Deuxième loi de Kepler	8
2.4	Approche énergétique.	9
2.5	Trajectoire : première Loi de Kepler	10
2.6	3eme loi de Kepler	11
3	Force de marée	11
3.1	Terme de marée	12
3.2	Limite de Roche	13
4	Balance de Eötvös	13

Introduction

L'Univers est régi par 4 forces fondamentales : la force électrostatique, vue dans une leçon précédente, les forces d'interaction nucléaire forte et faible, ainsi que la gravitation. Parmi ces 4 forces, la gravitation semble être la plus facile à observer puisque nous la subissons chaque seconde de notre vie, que ce soit en ayant le Soleil venir nous réveiller chaque jour, en sortant péniblement du lit ou en faisant tomber notre mug préféré au petit-déjeuner.

Cette leçon a pour objectif de comprendre cette interaction en la mettant en équation.

Lien vers Kepler.ggb : <https://www.geogebra.org/m/mmyeu93d>

1 La force gravitationnelle

1.1 Les travaux de Newton

"Il fallait être Newton pour apercevoir que la lune tombe, quand tout le monde voit bien qu'elle ne tombe pas."
Paul Valéry

La légende raconte que Newton a commencé à formaliser la force de gravitation après s'être assoupi au pied d'un pommier et avoir vu une pomme tomber. En réalité, il a réutilisé notamment les travaux de Kepler et de ses lois ainsi que de Huygens sur la force centrifuge pour énoncer en 1686 la loi suivante :

Deux points matériels quelconques exercent l'un sur l'autre des forces d'attraction directement opposées, dirigées suivant la droite qui les joint, proportionnelles à leurs masses et inversement proportionnelles au carré de la distance les séparant.

Mathématiquement, cette loi se traduit par poser une force exercée par un corps de masse M sur un corps de masse m de la forme

$$\overrightarrow{F_{M/m}} = -\overrightarrow{F_{m/M}} = -\mathcal{G} \frac{mM}{\|\overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_m}\|^2} \overrightarrow{u_{M \rightarrow m}} \quad (1)$$

avec $\mathcal{G} = 6.67408 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ est la constante universelle de gravitation et $\overrightarrow{u_{M \rightarrow m}}$ est le vecteur unitaire dirigé de M vers m .

Champ de pesanteur

Depuis le lycée, on introduit le poids, *i.e.* la force gravitationnelle exercée par un astre de masse M sur un objet de masse m à sa surface, comme une force de la forme $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$. On fait le lien avec la forme générale de la force gravitationnelle en posant

$$\overrightarrow{g} = -\mathcal{G} \frac{M}{r^2} \overrightarrow{u}$$

avec r la distance de l'objet au centre de l'astre attracteur et \overrightarrow{u} le vecteur unitaire dirigé du centre de l'astre vers l'objet. Le vecteur \overrightarrow{g} , appelé *champ de pesanteur*, est alors dirigé de l'objet vers le centre de l'astre.

Ordre de grandeur : Pour un objet à la surface de la Terre ($r = 6371 \text{ km}$, $M = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$), on trouve $g = 9.82 \text{ m s}^{-2}$. Notons que g n'est pas uniforme car la Terre n'est pas parfaitement sphérique.

Pour le Soleil, $r = 696342 \text{ km}$ et $M = 1,9891 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, on trouve $g = g = 273.6 \text{ m s}^{-2}$, soit 28 fois plus que pour la Terre!!

On peut remarquer que la force gravitationnelle entre 2 masses est de la même forme que la force électrostatique de Coulomb entre 2 charges. Dès lors, il est possible d'obtenir des propriétés sur la force gravitationnelle par analogie à celles que l'on connaît pour la force électrostatique.



1.2 Analogie avec l'électrostatique

1.2.1 Définition du champ gravitationnel

En électrostatique, on avait $\overrightarrow{F}_{q_1/q_2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2\|^2} \overrightarrow{u}_{1 \rightarrow 2} = q_2 \overrightarrow{E}_1(\overrightarrow{r}_2)$ où on introduit le champ électrostatique \overrightarrow{E}_1 au point \overrightarrow{r}_2 créé par la charge q_1 située en \overrightarrow{r}_1 en posant

$$\overrightarrow{E}_1(\overrightarrow{r}_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 \|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2\|^2} \overrightarrow{u}_{1 \rightarrow 2}$$

Par analogie, on peut définir le champ gravitationnel \overrightarrow{G}_1 au point \overrightarrow{r}_2 créé par une masse m_1 située en \overrightarrow{r}_1 comme étant :

$$\overrightarrow{G}_1(\overrightarrow{r}_2) = -\mathcal{G} \frac{m_1}{\|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2\|^2} \overrightarrow{u}_{1 \rightarrow 2}$$

On retrouve $\overrightarrow{F}_{m_1/m_2} = m_2 \overrightarrow{G}_1(\overrightarrow{r}_2) = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{\|\overrightarrow{r}_1 - \overrightarrow{r}_2\|^2} \overrightarrow{u}_{1 \rightarrow 2}$

En réalité, on n'a jamais des masses ponctuelles. Comment calculer \overrightarrow{G} pour des masses non ponctuelles ?



1.3 Champ gravitationnel pour une distribution continue de masse

Dans le cas où on traite des distributions continues de masse, on peut essayer de calculer le champ gravitationnel de la distribution. Pour cela, on commence par étudier un ensemble de masse ponctuelles $\mathcal{D} = P_n; (m_n, \overrightarrow{r}_n)$. La force gravitationnelle et donc le champ gravitationnel créé par cet ensemble est la somme des contributions de chaque masse ponctuelle. Ainsi, \mathcal{D} crée au point \overrightarrow{r} un champ gravitationnel

$$\overrightarrow{G}_{\mathcal{D}} = \sum_n \overrightarrow{G}_{P_n}(\overrightarrow{r}) = -\mathcal{G} \sum_n \frac{m_n}{\|\overrightarrow{r}_n - \overrightarrow{r}\|^3} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_n)$$

Si on considère que \mathcal{D} est maintenant une distribution continue définie par une masse volumique $\rho(\overrightarrow{r}')$, on peut passer à la limite continue dans l'expression précédente pour obtenir :

$$\overrightarrow{G}_{\mathcal{D}} = -\mathcal{G} \iiint_V d\overrightarrow{r}'^3 \frac{\rho(\overrightarrow{r}')}{\|\overrightarrow{r}' - \overrightarrow{r}\|^3} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}') \quad (2)$$

Cependant, cette formulation n'est pas très pratique à utiliser. Il existe néanmoins un autre moyen pour les calculer dans certaines conditions : le théorème de Gauss.



1.3.1 Théorème de Gauss

Par analogie avec l'électrostatique, on peut définir un théorème de Gauss gravitationnel. **Il est valide parce que $\|\vec{G}\|$ varie peu lorsqu'on est suffisamment loin de la distribution de masse (dépendance en $1/r^2$).**

Soit une surface Σ fermée, orientée vers l'extérieur (par convention) et délimitant un volume V . Alors le flux de \vec{G} à travers Σ est donné par :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{n} dS = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \quad (3)$$

où \vec{n} est le vecteur unitaire sortant normal à la surface dS et M_{int} est la masse contenue dans le volume V .

Comme pour l'électrostatique, ce théorème nécessite de connaître les symétries de \vec{G} pour être utilisable. Pour cela, on utilise le principe de Curie :

Toute transformation laissant invariante les causes laisse aussi invariante les effets.

Il en résulte alors que si une distribution de masse présente des invariances, le champ gravitationnel créé par cette distribution aura les mêmes propriétés d'invariance. En outre, on peut démontrer mathématiquement que si un point M de l'espace appartient à un plan de symétrie (Π) d'une distribution de masse alors le champ gravitationnel créé par cette distribution au point M est inclus dans (Π).

	Électrostatique	Gravitation
Charge du champ	q	m
Champ	\vec{E}	\vec{G}
Force	$q\vec{E}$	$m\vec{G}$
Constante	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,9 \times 10^9 \text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	$-\mathcal{G} = -6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Relation champ - potentiel	$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$	$\vec{G} = -\vec{\nabla}\Phi$
Équations locales	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$	$\vec{\nabla} \times \vec{G} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{G} = -4\pi\mathcal{G}\rho$
Théorème de GAUSS	$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{int}/\epsilon_0$	$\iint \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{int}$
Équation de POISSON	$\Delta V = -\rho/\epsilon_0$	$\Delta\Phi = 4\pi\mathcal{G}\rho$

Passons à quelques applications rapides.



1.3.2 Application 1 : Distribution sphérique

Prenons une distribution sphérique uniforme \mathcal{D} de rayon R de masse volumique ρ , de centre O (comme par exemple une étoile ou une planète). Les symétries de ce problème nous permettent de poser $\vec{G}(\vec{r}) = G(r)\vec{u}_r$ pour un point P à la position $\vec{r} = \vec{OP}$ par rapport à O , avec \vec{u}_r le vecteur unitaire colinéaire à \vec{OP} .

On choisit comme surface de Gauss une sphère de rayon r et de centre O . On distingue alors 2 cas :

- Cas où $P \in \mathcal{D}$

$$\begin{cases} \oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{n} \, dS = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \\ \oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{n} \, dS = G(r)4\pi r^2 \\ M_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \end{cases}$$

On trouve alors $G(r < R) = -\frac{4}{3}\pi\rho r\mathcal{G}$, ce qui donne pour le champ gravitationnel

$$\vec{G}(P \in \mathcal{D}) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{u}_r \quad (4)$$

- Cas où $P \notin \mathcal{D}$

$$\begin{cases} \oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{n} \, dS = -4\pi\mathcal{G}M_{int} \\ \oiint_{\Sigma} \vec{G} \cdot \vec{n} \, dS = G(r)4\pi r^2 \\ M_{int} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = M_{tot} \end{cases}$$

On trouve alors $G(r > R) = -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}\mathcal{G}$, ce qui donne pour le champ gravitationnel

$$\vec{G}(P \notin \mathcal{D}) = -\frac{4}{3}\pi\rho\frac{R^3}{r^2}\mathcal{G}\vec{u}_r = -\mathcal{G}\frac{M_{tot}}{r^2}\vec{u}_r \quad (5)$$

Le champ gravitationnel créé par une distribution sphérique \mathcal{D} en un point $P \notin \mathcal{D}$ est **rigoureusement identique** au champ gravitationnel créé en M si la distribution \mathcal{D} était ponctuelle.

↓ Encore une autre application un peu plus complexe.



1.3.3 Application 2 : le mer de Lindenbrok

Dans l'oeuvre de Jules Vernes *Voyage au centre de la Terre*, les protagonistes arrivent dans une cavité sous la terre dans laquelle se trouve un lac qui est décrit comme extrêmement plat (tandis qu'un lac à la surface de la Terre est légèrement courbé selon la courbure de la Terre). Nous allons vérifier cet observation romanesque.

Modélisation :

- Terre = boule homogène centrée en O , de rayon R , de densité massique uniforme ρ
- cavité = cavité sphérique centrée en O' , de rayon R'

Toutes les équations de gravitation sont linéaire donc on peut appliquer le principe de superposition :

$$\begin{aligned} \{\text{Terre} + \text{Cavité}\} &= \{\text{Terre sans cavité}\} - \{\text{Boule centrée en } O', \text{ de rayon } R'\} \\ &= \{\text{Boule homogène centrée en } O, \text{ de rayon } R, \text{ de densité } \rho\} \\ &\quad + \{\text{Boule homogène centrée en } O', \text{ de rayon } R', \text{ de densité } -\rho\} \end{aligned}$$

On peut donc séparer le système {Terre + cavité} en 2 sous-systèmes qui sont tous les 2 des distributions sphériques. On utilise le résultat obtenu précédemment pour obtenir les champs gravitationnels créés par chaque sous-système, à savoir

$$\vec{G}_+(P) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OP} \quad \text{et} \quad \vec{G}_-(P) = -\frac{4}{3}\pi(-\rho)\mathcal{G}\vec{O'P}$$

En sommant les 2 contributions, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{G}(P) &= \vec{G}_+(P) + \vec{G}_-(P) = -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OP} + \frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{O'P} \\ &= -\frac{4}{3}\pi\rho\mathcal{G}\vec{OO'} \end{aligned} \quad (6)$$

On obtient bien un champ gravitationnel uniforme dans la cavité, donc le lac serait effectivement plat.

↓ Passons maintenant à des exemples plus concrets.



2 Trajectoire : problème à deux corps

Le premier problème à étudier lorsque l'on parle de gravitation est le problème à deux corps, et nous restreindrons notre étude à celui-ci pour cette section. Il s'agit en effet du niveau de complexité maximal qui soit analytiquement soluble.

BFR p.94, on peut passer certaines étapes, on peut notamment ne prendre que les résultats et dire qu'on fera le reste en TD.

2.1 Position du problème : réduction canonique

On va s'intéresser à un système de deux points matériels de masse m_1 et m_2 , tels que le système est pseudo-isolé.

La seule force qui s'applique sur un point matériel est la force d'attraction gravitationnelle de l'autre :

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \quad (7)$$

où G est la constante universelle de gravitation ($6.674 \times 10^{-11} \text{ m kg}^{-3} \text{ s}^{-2}$), et $r_{12} = \|\vec{r}_{12}\| = \|\vec{OM}_2 - \vec{OM}_1\|$

On a supposé pour écrire ces équations que les deux corps possédaient une symétrie sphérique. Le champ alors créé est le même que celui d'un point de même masse.

Le système est supposé pseudo-isolé donc il y a conservation de la quantité de mouvement.

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = \vec{cste} \quad (8)$$

Or par définition du barycentre : $(m_1 + m_2)\vec{OG} = m_1\vec{OM}_1 + m_2\vec{OM}_2$. Donc en dérivant par rapport au temps, et en utilisant la loi de conservation : $\vec{v}_G = \vec{cste}$, le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

On peut alors écrire dans ce référentiel :

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (9)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad (10)$$

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12} = \overrightarrow{M_1M_2} \quad (11)$$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en \vec{r} , on lui applique donc le PFD.

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{F}_{12} \quad (12)$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (13)$$

$$m_2 m_1 \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (m_1 + m_2) \vec{F}_{21} \quad \text{par multiplication et différence} \quad (14)$$

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une masse fictive $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ qui est la masse réduite du système.

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21} = -\vec{\nabla} U \quad (15)$$

On étudie donc une masse μ fictive soumise à un potentiel $U = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$. On pourra alors en déduire toute la physique du système par une homothétie.

Le problème se réduit donc à l'étude d'un corps mobile de masse μ soumis à un champs de force centrale, de centre G , de force $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$.

Point ordre de grandeurs :

Force Terre-Soleil (3.5×10^{22} N),

Terre-Jupiter (1.9×10^{18} N),

Jupiter-Soleil (4.2×10^{23} N),

Terre-Lune (2×10^{20} N).

Terre-Humain à la surface (1×10^3 N)

L'approximation que l'on a fait de système pseudo-isolé n'est pas valable pour le soleil, qui subit plus l'attraction de Jupiter, mais représente une bonne approximation pour les planètes pour lesquelles l'influence du Soleil est prépondérante. Dans le cas des planètes ou des satellites, où l'objet sous influence a une masse faible devant l'astre qui produit le champ de gravité, l'astre peut être considéré comme immobile et la particule fictive est l'objet.



Simulation

🔗 Wolfram

⌚ 2mn

Montrer le fichier Wolfram et expliquer le fait que les deux masses orbitent autour de G , et que finalement on a une force centrale.

2.2 Planéité de la trajectoire

Pour montrer la planéité de la trajectoire, soit on invoque le théorème des forces centrales, soit on redémontre. Si on reprend le problème plus haut, qu'on considère l'objet positionné en M de masse μ dans un champ de force centrale \vec{F} , on peut définir le moment cinétique du système et appliquer le TMC :

$$\vec{L} = \overrightarrow{GM} \wedge \mu \frac{d\overrightarrow{GM}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overrightarrow{GM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

En effet la force est orientée le long de \overrightarrow{GM} , donc le produit vectoriel est nul. Ainsi \vec{L} est une constante. Le mouvement étant toujours orthogonal à \vec{L} , il est contenu dans un plan !

2.3 Deuxième loi de Kepler

On peut de plus déterminer la valeur du moment cinétique dans une base appropriée. Pour cela on va poser le référentiel tournant. Il s'agit de se placer dans un repère adapté à l'étude des problèmes à force centrale, donc plan : les coordonnées polaires. On veut déterminer le rayon r de la trajectoire en fonction de l'angle polaire θ .

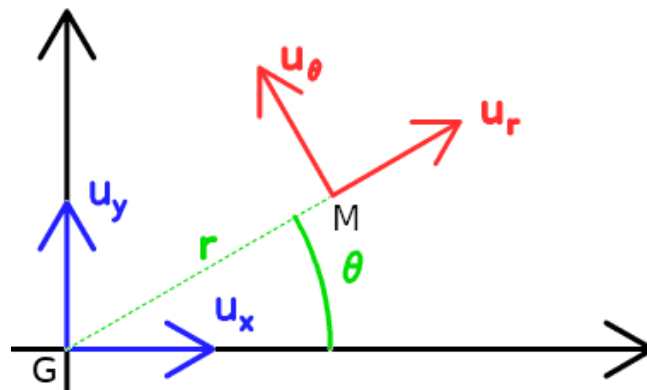


FIGURE 1 – Les coordonnées polaires. Ce sont des coordonnées cylindriques à $z = 0$.

Dans ce repère on a

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr\vec{u}_r}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Ainsi on peut calculer la valeur de \vec{L} qui est constante, et elle vaut

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \mu \frac{d\vec{r}}{dt} = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

On pose $C = r^2 \dot{\theta}$, que l'on nomme la constante des aires. On a de plus que l'aire balayée par le vecteur \vec{r} vaut $dA = \frac{\vec{r} \wedge \vec{v} dt}{2}$. D'où

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\|\vec{L}\|}{2\mu} = \frac{C}{2}$$

On retrouve la deuxième loi de Kepler : Le rayon issu du Soleil balaye des aires égales pendant des temps égaux (loi des aires).

BFR p.115

2.4 Approche énergétique.

On a un système sans dissipation donc l'énergie mécanique est conservée :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} \quad (16)$$

Or on peut écrire :

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \quad (17)$$

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad (18)$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \quad (19)$$

On obtient donc une énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \quad (20)$$

$$E_{p,eff} = \mu\frac{C^2}{2r^2} - G\frac{m_1 m_2}{r} \quad (21)$$

Intérêt ? On s'est maintenant ramené à un problème à une dimension, de variable r . On s'intéresse à une masse sur un rail, soumise au potentiel $E_{p,eff}$. **Faire le tracé, et schématiser les trajectoires, ↗ Sanz, slides.pdf.**

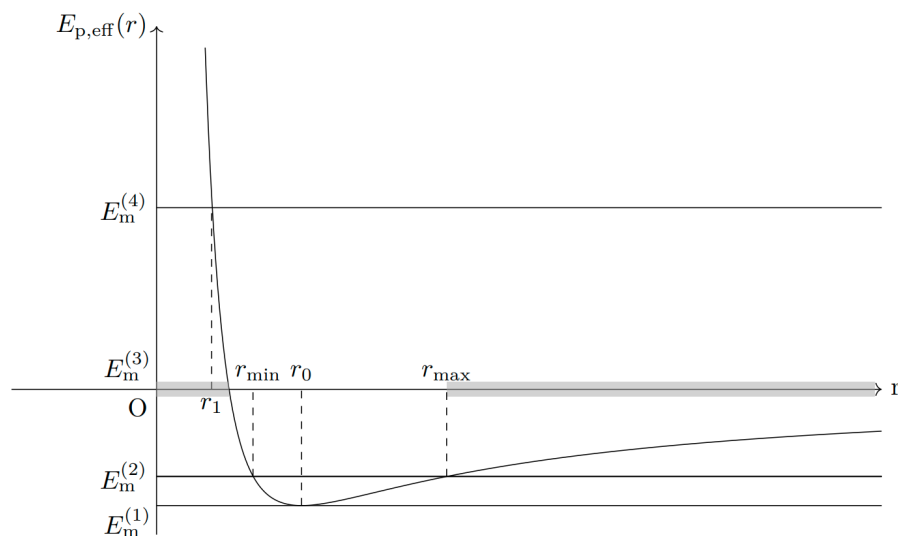


FIGURE 2 – Potentiel.

On distingue alors plusieurs cas de trajectoires :

- Cas 1 : L'énergie cinétique radiale est nulle et l'énergie mécanique est négative et égale à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective : la trajectoire est circulaire de rayon r_0 .
- Cas 2 : L'énergie cinétique radiale s'annule en r_{\min} et en r_{\max} et l'énergie mécanique est négative : la trajectoire est bornée, contenue dans $[r_{\min}; r_{\max}]$.
- Cas 3 : L'énergie mécanique est nulle et le système arrive à l'infini avec une énergie cinétique nulle : la trajectoire est minorée mais non bornée.
- Cas 4 : L'énergie mécanique est positive et la particule fictive arrive à l'infini avec une énergie cinétique non nulle : la trajectoire est minorée par r_1 et non bornée. On définit alors les états liés (cas 1 et 2) correspondant à des trajectoires bornées et les états de diffusion (cas 3 et 4) correspondant à des trajectoires non bornées.

Maintenant que nous avons une idée des trajectoires grâce à notre analyse physique, nous pouvons mener le calcul et déterminer leur expression analytique en intégrant les équations du mouvement.



2.5 Trajectoire : première Loi de Kepler

✦ Mécanique PCSI, MPSI (Brasselet) p.232, Mécanique Tome I (Landau) p. 68

Nous allons obtenir l'équation de la trajectoire par la méthode du vecteur excentricité qui a l'avantage de n'être ni laborieuse comme les méthodes de Binet, ni "sortie du chapeau" comme la méthode du vecteur de Laplace-Runge-Lenz.

Partons de la deuxième loi de Newton appliquée à la masse fictive dans R_G galiléen (\vec{v} désigne la vitesse de la particule fictive dans R_G) :

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{r^2} \vec{u}_r = -\frac{\mathcal{G}m_1m_2}{C} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \quad (22)$$

On intègre, ce qui donne

$$\vec{v} = \frac{\mathcal{G}M}{C} (\vec{u}_\theta + \vec{e}) \quad (23)$$

où la constante d'intégration \vec{e} est nommée vecteur excentricité, et $M = m_1 + m_2$.

En projetant sur \vec{e}_θ et en utilisant $\vec{v} \cdot \vec{u}_\theta = r\dot{\theta} = C/r$, on obtient : (on a forcément \vec{e} dans le plan, et on met l'origine de θ quand $\vec{u}_{\theta} \parallel \vec{e}$)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (24)$$

où $p = \frac{C^2}{\mathcal{G}M}$ est le paramètre, et e l'excentricité. On a le demi grand axe, $a = C/e$, et le demi petit axe, $b = \sqrt{Cp/e} = \sqrt{ap}$. On reconnaît l'équation d'une conique, et on peut relier les coniques à l'énergie potentielle via :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2C^2}{\mathcal{G}^2 M m_1 m_2} E_m} \quad (25)$$

On a les résultats suivants :

- e peut s'annuler pour une valeur négative de E_m : on retrouve donc la trajectoire circulaire.
- Si $E_m < 0$ alors $e < 1$, ce qui signifie que la trajectoire est une ellipse dont G est l'un des foyers. On retrouve que la trajectoire est bornée, et mieux qu'elle est fermée, ce qui n'était pas donné a priori. En réalité, cela vient du fait que le champ gravitationnel varie comme $1/r^2$. (on parle de champ newtonien).

On retrouve la 1ere loi de Kepler : les astres font des ellipses dont le soleil est l'un des foyers.

Vérification expérimentale : ↗ Brasselet p.238

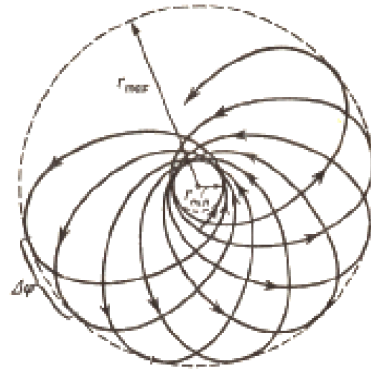


FIGURE 3 – Un mouvement à force centrale non newtonien.

2.6 3eme loi de Kepler

Troisième loi de Kepler (énoncé historique) : le rapport du carré de la période T sur le cube du demi grand-axe a de l'ellipse est une constante pour les planètes du système solaire.

$$\frac{a^3}{T^2} = cst$$

Par analyse dimensionnelle $\frac{a^3}{T^2} \propto \mathcal{G}M$

Analytiquement, l'aire balayée en une période T vaut $A(T) = ab\pi = \frac{LT}{2\mu}$, et $p = b^2/a = \frac{L^2}{\mathcal{G}\mu^2 M}$, d'où

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathcal{G}M}{4\pi^2}$$

↓ Intéressons nous à une application classique des effets de gravitation à plus de 2 corps : les marrées.



3 Force de marée

3.1 Terme de marée

Brasselet, p163

On se place dans \mathcal{R}_C galiléen. On note T le centre de la Terre. On a par ailleurs $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \vec{0}$.

- Le PFD appliqué à la Terre dans \mathcal{R}_C galiléen donne :

$$M_T \vec{a}(T)|_{\mathcal{R}_C} = \sum_i M_T \vec{G}_i(T) \quad (26)$$

où $G_i = \frac{\mathcal{G}M_i}{D_i}$ le champ créé par l'astre i en T .

- Le PFD appliqué à un point P de la surface terrestre dans \mathcal{R}_G non galiléen donne

$$m \vec{a}(P)|_{\mathcal{R}_G} = \vec{F} + m \vec{G}_T(P) + \sum_i m \vec{G}_i(P) + \vec{F}_{ie} \quad (27)$$

Or $\vec{F}_{ie} = -m \vec{a}|_{\mathcal{R}_C} = \sum_i m \vec{G}_i(T)$, ce qui donne

$$m \vec{a}(P)|_{\mathcal{R}_G} = \vec{F} + m \vec{G}_T(P) + \sum_i m \left(\vec{G}_i(P) - \vec{G}_i(T) \right) \quad (28)$$

Le terme $m \sum_i \left(\vec{G}_i(P) - \vec{G}_i(T) \right)$ est appelé **terme de marée**.

OdG : influence de divers astres i

$$\vec{G}_i(P) - \vec{G}_i(T) \lesssim M_i \mathcal{G} \left(\frac{1}{(D_i - d)^2} - \frac{1}{D_i^2} \right) \simeq \frac{2\mathcal{G}M_i d}{D_i^3} \quad (29)$$

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
Masse M_i (kg)	$2 \cdot 10^{30}$	$7 \cdot 10^{22}$	$5 \cdot 10^{24}$	$6 \cdot 10^{23}$	$2 \cdot 10^{27}$
Distance D_i (m)	$1 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^8$	$5 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{10}$	$6 \cdot 10^{11}$
Terme de marée $ \vec{G}_i(P) - \vec{G}_i(T) $ (m.s ⁻²)	$5 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-11}$	$2 \cdot 10^{-12}$	$8 \cdot 10^{-12}$

FIGURE 4 – OdG de termes de marée pour différents astres

⇒ On ne considère que l'influence de la Lune et du Soleil.

- On a $G_T \simeq 10 \text{ m s}^{-2}$ qui apparaît également dans le PFD, donc pour l'étude du mouvement d'un corps au voisinage de la Terre la force de marée est complètement négligeable.

On observe cependant des marées océaniques. Comment est-ce possible si le terme de marée est négligeable? En réalité, les marées océaniques sont bel et bien négligeables à l'échelle de la Terre mais pas à l'échelle humaine!

⌋ Cependant, il est possible que le terme de marée ne soit plus du tout négligeable devant le champ de gravité d'un astre.



3.2 Limite de Roche

Lorsque la distance entre deux astres diminue, on peut déterminer la distance critique à partir de laquelle, la force de marée deviendra égale en norme à la force gravitationnelle (cf schéma). A partir de cette limite, il ne peut y avoir existence de l'astre et il se fragmente.

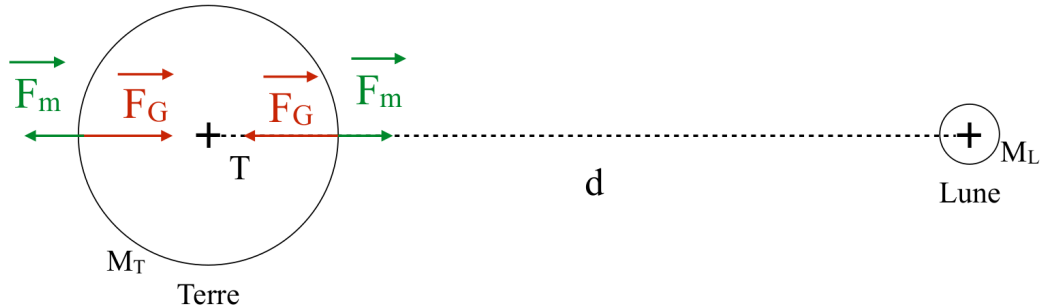


FIGURE 5 – Force de marée vs force gravitationnelle.

Calculons la distance minimale nécessaire entre un astre T et un astre i pour que T ne soit pas désintégré. Pour cela, prenons un point P à la surface de l'astre T tel que T , P et O_i soient alignés. Il faut :

$$\begin{aligned} \text{terme de marée} &\leq \left\| \vec{G}_T(P) \right\| \\ \frac{2\mathcal{G}M_i R_T}{D_i^3} &\leq \frac{\mathcal{G}M_T}{R_T^2} \\ D_i &\geq R_T \left(\frac{2M_i}{M_T} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

Pour que la Lune ne détruise pas la Terre, il faut $D_{T-L} \geq 2 \times 10^6$ m

4 Balance de Eötvös

https://en.wikipedia.org/wiki/Eötvös_experiment

<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/maree-deformation.xml>

<http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/Roche.xml>

Conclusion

Dans ce cours nous avons exprimé la force de gravitation, l'énergie potentielle ainsi que le champ associés. Nous avons résolu les équations du mouvement dans le cas d'un système soumis à un seul champ de gravitation, puis le cas des marées statiques. Nous pourrions néanmoins nous intéresser à des interactions à N corps (par simulation informatique).