

LP04

precession dans les domaines

niveau: L3

macroscopiques
et
microscopiques

prérequis: mécanique du point
électromagnétisme de base
thm des moment cinétique
portance d'une aile
matrice d'inertie

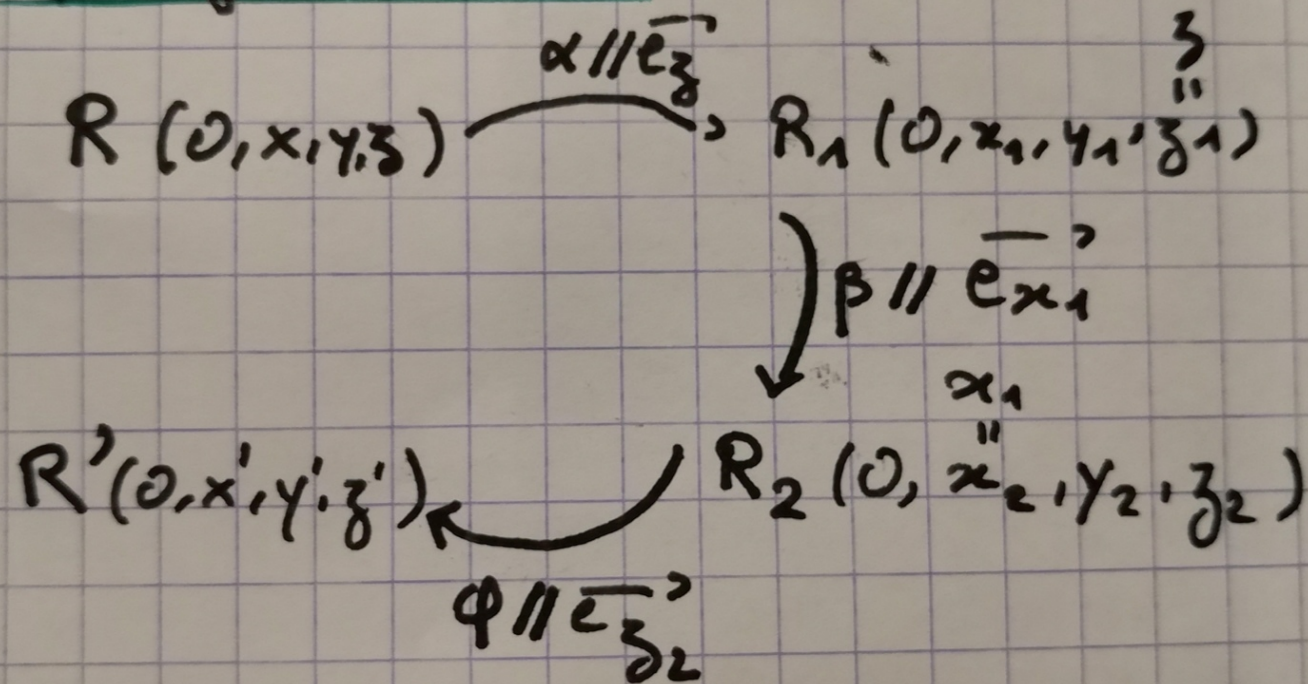
plan: I Positionnement théorique

II Macroscopique

III Microscopique

I] Positionnement théorique

1] Angles d'Euler



α : précession

β : nutation

φ : rotation propre

Bilan: $\vec{\omega}_{R'}$, pulsation de rotation de R' dans R

$$\vec{\omega}_{R'} = \dot{\alpha} \vec{e}_z + \dot{\beta} \vec{e}_{x_1} + \dot{\psi} \vec{e}_{z'}$$

2) Intérêt pratique

Cas préférentiel: objet à symétrie axiale. On suit l'axe z' avec l'axe de symétrie, et les rotation de l'objet.

Conséquence mathématique :

$$\vec{L} = \underline{\underline{I}} \vec{\omega}$$

↑ tenseur d'inertie

$$= \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}_{R'} \vec{\omega}_{R'}$$

($I_1 = I_2$)
symétrie

R' diagonalise I.

3] Approximation gyroscopique

Rotation propre \gg autres

i.e. $|\dot{\psi}| \gg |\dot{\alpha}|, |\dot{\beta}|$

$$\vec{\omega}_{R'} = \cancel{\dot{\alpha} \vec{e}_z'} + \cancel{\dot{\beta} \vec{e}_{x_1}'} + \boxed{\dot{\psi} \vec{e}_z'}$$

15

$$\vec{L} = \underline{I} \vec{\omega} \approx I_3 \dot{\varphi} \vec{e}_z$$

↳ approx gyroscopique

II] Domaine macro

1] La toupie

Solide de révolution } $\vec{L} \approx I_3 \dot{\varphi} \vec{e}_z$
tourne vite

$$\vec{OC} = \vec{l}, \text{ TMC}$$

$$\text{↳ } \left. \frac{d\vec{l}}{dt} \right|_R = \vec{l} \wedge m \vec{g} \quad (1)$$

$$\vec{H} \cdot \vec{L}_0 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_0^2) = 0$$

$$\text{car } \vec{L}_0 \parallel \vec{e}_z' \text{ et } \vec{I} \parallel \vec{e}_z'$$

$$\text{et } \vec{I} \wedge \vec{g}' \perp \vec{e}_z'$$

$$\Rightarrow \|\vec{L}_0\| = \text{cst}$$

$$\vec{I} \cdot \vec{e}_z' \Rightarrow \frac{d}{dt} (L_{0z}) = 0$$

$$\text{car } \vec{g}' \parallel \vec{e}_z' \text{ et } \vec{I} \wedge \vec{g}' \perp \vec{e}_z'$$

$$\Rightarrow L_{0z} = \text{cst}$$

Bilan: $\vec{L}_0 \in \text{Cone}$, sommet 0

angle $2\beta_0$

2) Precession de la toupie

$$\vec{p} \parallel \vec{L}_0 \Rightarrow \vec{p}' = \frac{\vec{L}_0'}{L_0} l$$

$$\text{d'où } \vec{p}' \wedge m\vec{g}' = - \frac{m\vec{g}' l}{L_0} \wedge \vec{L}_0'$$

$$\text{et } \left. \frac{d\vec{L}_0'}{dt} \right|_R = \vec{\omega}_p' \wedge \vec{L}_0'$$

approx gyro? $|\dot{\phi}| \gg \dots$, oui

$$\vec{L}_0' = L_3 \dot{\phi} \vec{e}_z'$$

$$\left[\left. \frac{d\vec{L}_0'}{dt} \right|_R = \frac{mgl}{L_3 \dot{\phi}} \vec{e}_z' \wedge \vec{L}_0' \right]$$

vérification la validité:

$$\begin{cases} l \sim 5 \text{ cm} \\ R \sim 3 \text{ cm} \\ \dot{\varphi} \sim 50 \times 2\pi \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ m \sim 100 \text{ g} \end{cases}$$

$$I_3 \neq mR^2$$

$$\Leftrightarrow \omega_p \neq 2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\omega_p \ll \omega_{R.P}$$

c'est valide

3] Le gyroscope

gyroscope \approx roue

$$I_3 \gg I_1, I_2$$

observations:

• direction stable si $\vec{\Gamma}' = \vec{0}'$

• rotation $\perp \vec{\Gamma}'$ si $\vec{\Gamma}' \neq \vec{0}'$
 $\perp \vec{z}'$

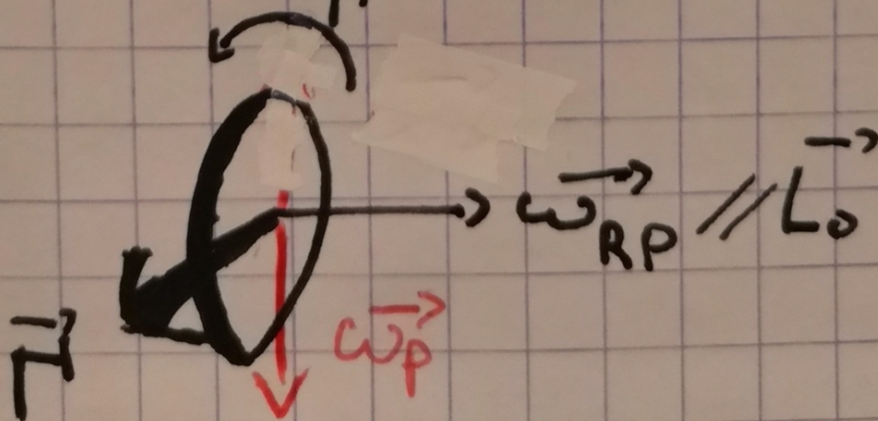
TMC: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} \Big|_R = \vec{\Gamma}$
L ici la masse

$$\text{Or } \frac{d\vec{L}_0}{dt} \Big|_R = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \Big|_{R'} + \vec{\omega}_p \wedge \vec{L}_0$$

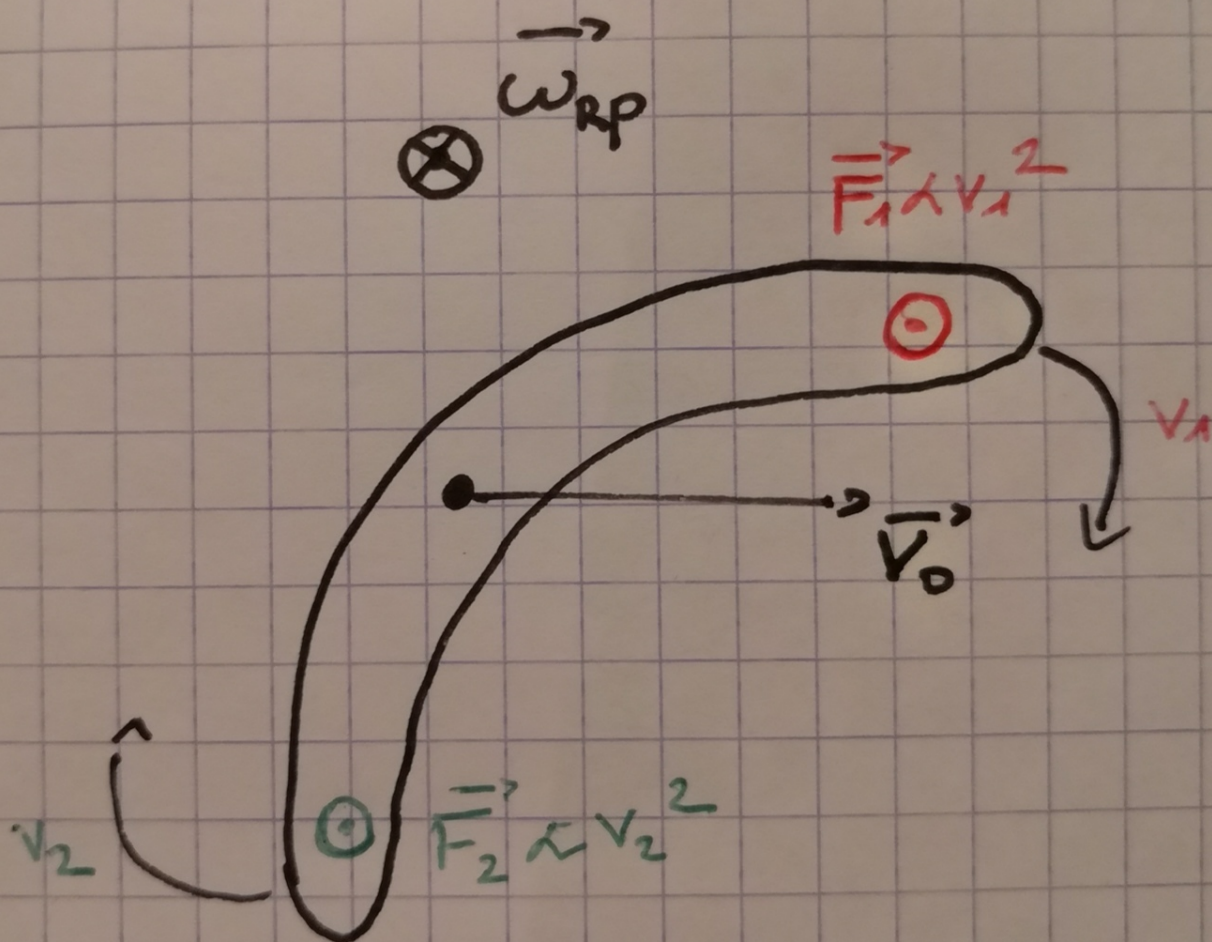
$$\text{et } \frac{d\vec{L}_0}{dt} \Big|_{R'} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \vec{\Gamma} = \vec{\omega}_p \wedge \vec{L}_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_p \perp \vec{\Gamma} \text{ et } \vec{e}_z \\ \omega_p \propto \Gamma \end{array} \right.$$



4) Boomerang :



$$v_2 < v_1 \Rightarrow \vec{\Gamma}$$

\Rightarrow précession !

III] Domaine microscopique

$$1) \underline{\vec{\mu}' \leftrightarrow \vec{L}'}$$

Modèle de Bohr : électron tournant

$$\begin{cases} \vec{L}' = \vec{r}' \wedge m_e \vec{v}' = m v r \vec{n}' \\ \vec{\mu}' = i A \vec{n}' \end{cases}$$

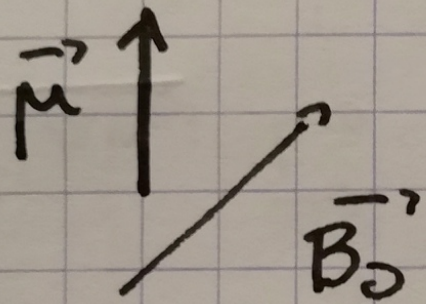
$$\text{Or } i = d_c q = -\frac{e}{T} \text{ avec } T = \frac{2\pi r}{v}$$

$$\vec{\mu}' = -\frac{e v r}{2} \vec{n}'$$

$$\underline{\underline{\Rightarrow}} \quad \vec{\mu}' = \gamma \vec{L}' \quad \cdot \quad \gamma = -\frac{e}{2m_e}$$

$$\gamma \sim -8,8 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$$

2) Action d'un champs magnétique


$$\Rightarrow \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$$

$$\text{TMC: } \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$$
$$= \gamma \vec{L} \wedge \vec{B}_0$$

$$\vec{\omega}_0 = -\gamma \vec{B}_0$$

Eq. de précession !

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\omega}_0 \wedge \vec{L}_0$$

Pulsation de Larmor ↷

(12)

OPG: Terrestre, $B \approx 10^{-4} \text{ T}$

$$\omega_0 \approx 8,8 \cdot 10^6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Labo, $B \sim 1 \text{ T}$

$$\omega_0 \sim 8,8 \cdot 10^{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

3] Principe de la RMN

$$\vec{B}_0 + \vec{B}_1, \perp$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = (\vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1) \wedge \vec{L}_0$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \left. \frac{d\vec{M}}{dt} \right|_R &= \left. \frac{d\vec{\mu}}{dt} \right|_R - \vec{\omega} \wedge \vec{\mu} \\ &= (\vec{\omega}_1 - (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0)) \wedge \vec{\mu} \end{aligned} \quad \sqrt{14}$$

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} \Big|_{R'} = (\vec{\omega}_1 - \delta\vec{\omega}) \wedge \vec{\mu}'$$

2 cas :

- $\vec{\omega}_0$ et $\vec{\omega}$ très différents

$$\|\delta\vec{\omega}\| \gg \|\vec{\omega}_1'\|$$

précession autour de \vec{B}_0 .

- $\vec{\omega}_0 \sim \vec{\omega}$, $\|\delta\vec{\omega}\| \ll \|\vec{\omega}_1'\|$

précession autour de \vec{B}_1 .

↳ résonance

$$\text{on a: } \nu_0(\text{H}_2\text{O}) = 42,6 B_0 \text{ MHz}$$