LP05 - Lois de conservation en dynamique

24 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L3

Bibliographie

✍ *Symétrie en mathématique, physique et chimie (chap 45 et 47)* **Sivardière**	Base de la leçon
✍ *Physique tout-en-un PCSI* **Salamito**	Théorèmes de base
✍ *Principes variationnels et Dynamique*	Pour aller plus loin
✍ *Mécanique du point* **BFR**	Problème à 2 corps
✍ *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fundamentals and Large-Scale Circulation* **Geoffrey**	Approche avec la mécanique des fluides

Prérequis

- Mécanique du point : PFD, TEC, TMC
- Systèmes de coordonnées
- Gravitation : force de Newton, lois de Kepler
- Thermodynamique classique
- Calcul vectoriel
- Bases d'hydrodynamiques : Bernoulli, lignes de courant

Expériences

- Conservation du moment cinétique : chaise + poids

Table des matières

Introduction

Les cours précédents nous on permis de décrire la dynamique des points matériels. On a ainsi pu revoir la deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique qui donne l'accélération d'un point de masse m soumis à un ensemble de forces. On a aussi étudié le cas de la rotation en introduisant le théorème du moment cinétique, ainsi que le théorème de l'énergie cinétique pour étudier les variations d'énergie.

L'utilisation de ces lois requiert une connaissance des forces qui agissent sur le système et peuvent donner lieu à des calculs lourd, on a cependant aussi vu que dans de nombreux cas, on avait conservation de certaines quantités comme la quantité de mouvement ou de l'énergie mécanique, et que cette conservation nous permettait de simplifier les problèmes. Le but de cette leçon est de montrer que ces conservations sont liées à des principes plus généraux, et que ces principes ne se limitent pas à la mécanique classique.

1 Lois fondamentales et invariances

Dans cette partie, on repart des postulats de la mécanique newtonienne, on peut écrire le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F} \tag{1}$$

On suppose dans toute cette partie que les forces dérivent d'un potentiel : $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$, où $U(x, y, z, t)$ est le potentiel dans lequel évolue le système.

On va alors considérer des *invariances* : Ce sont des transformations qui laissent le système et sa dynamique inchangés. On va tout de suite prendre un exemple.

1.1 Invariances spatiales

1.1.1 Invariance par translation

On dit que le problème est *invariant par translation selon une direction* x lorsque la position x_0 n'a pas d'influence sur la dynamique d'un système. Cela implique que le potentiel U ne dépendent pas de x. Ainsi, on projetant le PFD sur l'axe x, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}p_x}{\mathrm{d}t} = F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

on a donc **conservation de la quantité de mouvement selon** x.

Application : la balle lancée

On considère le skateboard sans frottement, la terre plate et infinie donc on a invariance par translation selon x, on pourrait faire l'expérience 10 m à coté, on obtiendrait les mêmes résultats. On a donc conservation de la quantité de mouvement. Si on considère la balle de 10 kg et l'ensemble {skateboard + personne} de 80kg. La balle a une vitesse initiale de 2 m/s, et par conservation de la quantité de mouvement $m_b v_b = (m_b + m_h + m_s) v_f$ donc on trouve une vitesse finale de 0.22 m/s.

Invariance par translation ⇒ Conservation de la quantité de mouvement

Quid des rotations ?

1.1.2 Invariance par rotation

Cette fois, on écrit le potentiel en coordonnées sphériques : $U(r, \theta, \phi, t)$. L'invariance par rotation permet de simplifier l'écriture de U pour avoir $U(r, t)$. Ainsi, la force s'appliquant sur le système s'écrit $\overrightarrow{F} = F_r \overrightarrow{e_r}$. Le TMC donne :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} = r\overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \tag{3}$$

Le moment cinétique est donc conservé.

Application : la gravitation

On verra ça dans la seconde partie.

Invariance par rotation $\Rightarrow$ Conservation du moment cinétique

On a vu les invariances spatiales, il reste à étudier l'invariance temporelle.

1.2 Invariance temporelle

On considère maintenant un potentiel indépendant du temps : $U(x, y, z$. On repart du PFD pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}}{\mathrm{d}t} &= \overrightarrow{F} = -\overrightarrow{\nabla} U \\
\frac{\mathrm{d}m\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{v} &= -\overrightarrow{\nabla} U \cdot \overrightarrow{v} \\
\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= -\overrightarrow{\nabla} U \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v} = \mathcal{P}_F \qquad\qquad \text{TEC} \\
E_c(t_2) - E_c(t_1) &= -\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{\nabla} U \cdot \overrightarrow{v} \mathrm{d}t \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{\nabla} U \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{r} \qquad \text{car} \qquad \mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} U \cdot \overrightarrow{v} \mathrm{d}t \\
&= -\int_{U_1}^{U_2} \mathrm{d}U
\end{aligned} \tag{4}$$

donc on obtient :

$$E_c(t_2) + U(t_2) = E_c(t_1) + U(t_1) \iff E_m(t_2) = E_m(t_1) \tag{5}$$

On obtient donc la conservation de l'énergie mécanique car U est le potentiel dont dérive les forces s'appliquant sur le système et donc U est l'énergie potentielle du système. Les forces dérivant d'un potentiel indépendant du temps sont dites *conservatives* car elles conservant l'énergie mécanique. le système est alors dit *conservatif*.

Invariance temporelle $\Rightarrow$ Conservation de l'énergie mécanique

Passons maintenant à un exemple d'application de ces principes avec la gravitation.

2 Problème à deux corps

On va s'intéresser à un système de deux points matériels de masse m_1 et m_2, tels que le système est pseudo-isolé.

La seule force qui s'applique sur un point matériel est la force d'attraction gravitationnelle de l'autre :

$$\overrightarrow{F}_{12} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{{r_{12}}^2}\frac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}} \tag{6}$$

où $\mathcal{G}$ est la constante universelle de gravitation ($6.674 \times 10^{-11}\,\mathrm{m\,kg^{-3}\,s^{-2}}$), et $r_{12} = \|\overrightarrow{r_{12}}\| = \left\|\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\right\|$

2.1 Conservation de la quantité de mouvement

La force dérive d'un potentiel $U = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}}$ qui ne dépend que de la différence $\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$. On a donc une invariance par toute translation, qui se traduit par une **conservation de la quantité de mouvement** (prévisible vu que le système est pseudo-isolé). On a donc :

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{cste} \tag{7}$$

Or par définition du barycentre : $(m_1 + m_2)\overrightarrow{OG} = m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}$. Donc en dérivant par rapport au temps, et en utilisant la loi de conservation : $\overrightarrow{v_G} = \overrightarrow{cste}$, le centre de gravité est en translation rectiligne uniforme, le référentiel barycentrique est donc galiléen, et on va dans la suite se placer dans celui-ci.

On peut alors écrire dans ce référentiel :

$$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{M_1M_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r} \tag{8}$$

$$\overrightarrow{r_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r} \tag{9}$$

$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r_{12}} = \overrightarrow{M_1M_2} \tag{10}$$

La dynamique du système s'obtient donc en étudiant celle d'un point matériel fictif situé en $\overrightarrow{r}$, on lui applique donc le PFD.

$$m_1\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r_1}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{12} \tag{11}$$

$$m_2\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r_2}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{F}_{21} = -\overrightarrow{F}_{12} \tag{12}$$

$$m_2 m_1\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{F}_{21} \qquad \text{par multiplication et différence} \tag{13}$$

La dynamique du point fictif est donc déterminée par le PFD, en prenant une **masse fictive** $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ qui est la masse réduite du système.

On étudie donc une masse fictive $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ soumise au potentiel $U(r) = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r}$. On peut en déduire toute la physique du système.

On a posé le problème dans un référentiel galiléen, avec un potentiel $U(r)$. on peut donc continuer avec les quantités conservées.

2.2 Conservation du moment cinétique

On a invariance par rotation, donc on a **conservation du moment cinétique** :

$$\overrightarrow{L} = \overrightarrow{r} \wedge \mu \overrightarrow{v} \tag{14}$$

Puisque le vecteur $\overrightarrow{L}$ est constant, sa direction l'est aussi. Or $\overrightarrow{L}$ est normal à la fois à $\overrightarrow{r}$ et à $\overrightarrow{v}$ donc au mouvement. Ainsi, le mouvement est plan.

De plus, $\left\|\overrightarrow{L}\right\| = \mu r^2 \dot{\theta}$ est constante. Cependant, le point balaye une aire $\mathrm{d}A = \dfrac{\|\overrightarrow{r} \wedge \mu \overrightarrow{v}\| \,\mathrm{d}t}{2}$ pendant $\mathrm{d}t$. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\left\|\overrightarrow{L}\right\|}{2\mu} = cste = \frac{\mathcal{C}}{2} \tag{15}$$

On retrouve la deuxième loi de Kepler : le rayon Terre-Soleil balaie des aires égales pendant des temps égaux.

Il reste à exploiter l'invariance temporelle

2.3 Conservation de l'énergie

le potentiel est indépendant du temps donc on a **conservation de l'énergie mécanique** :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu v^2 - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} \tag{16}$$

Or on peut écrire :

$$\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r} \tag{17}$$

$$\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \tag{18}$$

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{\mathcal{C}^2}{r^2} \tag{19}$$

On obtient donc une énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) \quad (20)$$

$$E_{p,eff} = \mu\frac{\mathcal{C}^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r} \quad (21)$$

Intérêt ? On s'est maintenant ramené à un problème à une dimension, de variable r. On s'intéresse à une masse sur un rail, soumise au potentiel $E_{p,eff}$. Faire le tracé, et schématiser les trajectoires, ✍ Sanz.

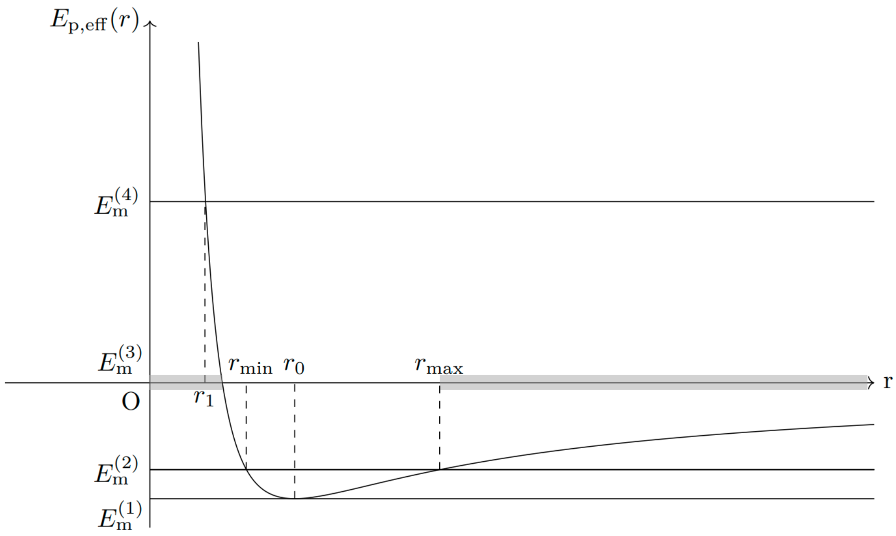

Figure 1 – Potentiel.

On distingue alors plusieurs cas de trajectoires :

- Cas 1 : L'énergie cinétique radiale est nulle et l'énergie mécanique est négative et égale à la valeur minimale de l'énergie potentielle effective : la trajectoire est circulaire de rayon r0.
- Cas 2 : L'énergie cinétique radiale s'annule en r_{min} et en r_{max} et l'énergie mécanique est négative : la trajectoire est bornée, contenue dans $[r_{min}\,;\,r_{max}]$.
- Cas 3 : L'énergie mécanique est nulle et le système arrive à l'infini avec une énergie cinétique nulle : la trajectoire est minorée mais non bornée.
- Cas 4 : L'énergie mécanique est positive et la particule fictive arrive à l'infini avec une énergie cinétique non nulle : la trajectoire est minorée par r1 et non bornée. On définit alors les états liés (cas 1 et 2) correspondant à des trajectoires bornées et les états de diffusion (cas 3 et 4) correspondant à des trajectoires non bornées.

On peut ainsi déterminer si les trajectoires seront bornées (états liés) ou si on a un état de diffusion, mais pour avoir l'allure de la trajectoire, il faudrait intégrer cette équation ce qui peut être fastidieux.

On a une information supplémentaire sur le problème : le potentiel est en 1/r

2.4 Runge-Lenz

La symétrie [1] associée est bizarre.

On appelle *vecteur de Laplace-Runge-Lenz* le vecteur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L} - \mathcal{G}m_1m_2\overrightarrow{e_r}$. On le dérive par rapport au temps pour obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{R}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \wedge \overrightarrow{L} + \overrightarrow{v} \wedge \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}}{\mathrm{d}t} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \\ &= -\mathcal{G}\frac{1}{\mu}\frac{m_1m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r} \wedge \mu r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_theta} \\ &= \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_theta} - \mathcal{G}m_1m_2\dot{\theta}\overrightarrow{e_theta} \\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned} \tag{22}$$

Le vecteur de Runge-Lenz est bien une **quantité conservée**. Pourquoi utiliser ce vecteur ? Il permet d'obtenir rapidement l'expression de la trajectoire. on choisit le grand axe comme axe de référence pour les angles.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{R} \cdot \overrightarrow{r} = Rr\cos\theta &= (\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L}) \cdot r\overrightarrow{e_r} - \mathcal{G}m_1m_2r \\ &= r\dot{\theta}Lr - \mathcal{G}m_1m_2r \\ &= \mu\mathcal{C}^2 - \mathcal{G}m_1m_2r\end{aligned} \tag{23}$$

On peut alors écrire l'équation de la trajectoire :

$$r = \frac{r_0}{1 + e\cos(\theta)} \qquad \text{avec} \qquad r_0 = \frac{\mathcal{C}^2}{\mathcal{G}m_1m_2} \qquad \text{et} \qquad e = \frac{R}{\mathcal{G}m_1m_2} \tag{24}$$

On peut le tracer pour différents cas :

- $e = 0$: cercle de rayon r_0
- $e < 1$: ellipse
- $e = 1$: parabole
- $e > 1$: hyperbole

On peut d'ailleurs montrer que $E_m = \mathcal{G}\frac{m_1m_2}{2p}(e^2 - 1)$. Pour $E_m < 0$, la trajectoire est non seulement bornée mais srtout elle est **fermée** ! (OdG : cf Salamito p767).

3 Mécanique des Fluides

✍ Leçon de 2017.

On se place dans le cadre des fluides parfaits. Un fluide parfait incompressible obéit aux équations d'Euler de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, ces deux équations formant les équations de base des fluides non dissipatifs, ainsi qu'à une version du premier principe de la thermodynamique, ces deux aspects (mécanique des fluides et thermodynamique) étant intimement liés.

On va prouver les équations là dessous :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho\overrightarrow{v}) = 0$$

$$\frac{\partial\overrightarrow{v}}{\partial t} + (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla})\overrightarrow{v} = -\frac{\overrightarrow{\nabla}P}{\rho} + \overrightarrow{f}$$

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Laplace-Runge-Lenz_vector#Conservation_and_symmetry

3.1 Conservation masse

$\delta V = \delta x \delta y \delta z$, avec un fluide de masse volumique ρ, de vitesse $\overrightarrow{v} = \sum v_i \overrightarrow{e_i}$.

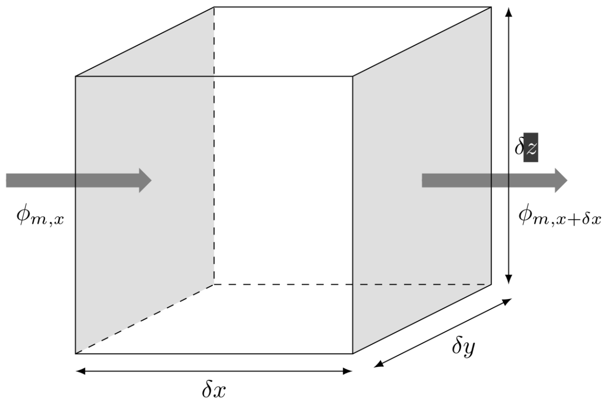

Figure 2 – Conservation de la masse

On fait un bilan de flux de matière ϕ_m :

$$\delta\phi_{m,x} = \phi_{m,x}(x,y,z,t) - \phi_{m,x+\delta x}(x+\delta x, y, z, t)$$

Or on a $\phi_{m,x}(x,y,z,t) = \delta y \delta z[\rho v_x]$. Attention considérer $[\rho v_x]$ comme une fonction à part entière. D'où

$$\delta\phi_{m,x} = \delta y \delta z \delta(-\rho v_x) = -\delta V \frac{\partial \rho v_x}{\partial x}$$

Idem selon les autres axes :

$$\delta\phi_{m,i} = -\delta V \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i}$$

Or on a $\dfrac{\partial \delta m}{\partial t} = \delta\phi_m$, et $\delta m = \rho \delta V$, d'où

$$\frac{\partial \delta m}{\partial t} = \delta V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\delta V \left(\sum_{i=x,y,z} \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} \right)$$

Et finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\nabla} \cdot (\rho \overrightarrow{v}) = 0$$

Soit encore avec $\dfrac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{v} = O$$

Interprétation : Écoulement stationnaire

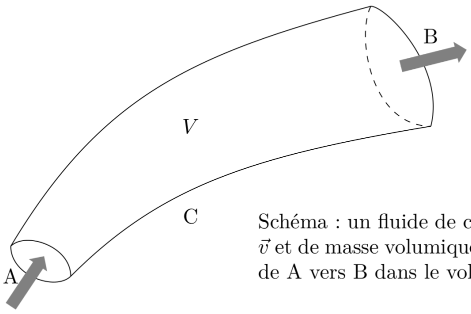

Schéma : un fluide de champ de vitesse $\vec{v}$ et de masse volumique ρ, se déplaçant de A vers B dans le volume V

On a Green Ostrogradski qui donne la conservation du débit massique $Q_m = \rho S v$ dans un tuyau de lignes de courant. On peut y voir une analogie aux tubes de courant : $\mathrm{kg\,s^{-1}} - \mathrm{C\,s^{-1}}$

Cette conservation du débit massique permet une première compréhension des vents qui existent en altitude et à certaines latitutes : les courant-jets. Il s'agit de forts courants d'air en altitude (vers 10 km) et où les vents dépassent les 100 $\mathrm{km\,h^{-1}}$. La forme qu'ils prennent et leur étendue spatiale dépend des dépressions en anti-cyclones proches. Grossièrement, la conservation du débit massique appliquée à un courant-jet nous fait assimiler la surface à la différence de pression entre dépression et anti-cyclone. Ainsi, une différence de pression plus grande va rendre plus dense et accélérer le courant-jet [2].

3.2 Bernoulli (conservation de l'énergie)

À l'instar de la mécanique du point et du solide, il est courant de s'intéresser au bilan énergétique en mécanique des fluides, et encore plus dans la météorologie et l'océanographie.

On reprend le schéma préccédent, A et B dans un champs de force potentiel qu'on appelle $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ (oui c'est le poids). L'énergie volumique $\epsilon = \epsilon_c + \epsilon_p + \mu + \pi \mathrm{d}t$ est la somme d'un terme cinétique, potentiel, interne et de puissance volumique algébrique reçue.

$$\epsilon_i = \epsilon_{c,i} + \epsilon_{p,i} + \mu_i + \pi_i \mathrm{d}t \qquad i = A \text{ ou } B$$

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}\rho_i \overrightarrow{v_i}^2 + \rho_i g z_i + P_i + \mu_i + \pi_i \mathrm{d}t$$

On écrit l'enthalpie (volant, comme Alladin) : $h := \mu + P$

$$\epsilon_i = \frac{1}{2}\rho_i \overrightarrow{v_i}^2 + \rho_i g z_i + h_i + \pi_i \mathrm{d}t$$

On se place en régime stationnaire, ce qui impose que l'énergie volumique en A est la même que celle en B car on a une invariance temporelle [3]. On fait la différence et on tombe sur la relation générale de Bernoulli.

$$\frac{1}{2}\rho \overrightarrow{v}^2 + \rho g z + h + \pi \mathrm{d}t = cst$$

Fluide parfait sans puissance

$$\frac{1}{2}\rho \overrightarrow{v}^2 + \rho g z = cst$$

Plus que 4 inconnues, on peut s'en sortir !!

2. https://www.bbc.com/weather/feeds/16578747
3. CF partie 1.

Il est courant de voir la relation de Bernoulli écrite avec la pression à la place de l'enthalpie ; il faut pour cela supposer que l'énergie interne volumique du fluide ne varie pas.

Il faut donc encore diminuer le nombre d'inconnue et/ou ajouter des équations pour résoudre le système d'équation. Si on se place dans le cas incompressible, souvent pris en compte avec la relation de Bernoulli, la seconde équation est alors la conservation du débit volumique et une inconnue a été supprimé. Mais cela reste un système de 2 équations à 3 inconnues. Pour le résoudre, on va alors chercher une position où les grandeurs sont connues, par exemple à une ouverture sur l'extérieur où la pression est assimilée à la pression atmosphérique et la vitesse du fluide, nul. Il va donc s'agir de remonter de proche en proche jusqu'à déterminer les grandeurs là où on le désire. Un autre point intéressant est de constater qu'à altitude constante, et pour un rétrécissement de la section, la vitesse du fluide augmente par conservation du débit volumique et que la pression diminue. Ce qui peut être contre-intuitif : il n'aurait pas été forcément absurde de considérer qu'une vitesse de fluide plus élevée implique un pression plus grande 3 . En tout cas, la relation de Bernoulli découle d'un conservation de l'énergie, telle qu'on en croise souvent en mécanique du point et du solide.

3.3 Conservation de la vorticité potentielle

Voir leçon de 2017, ou wikipédia : `https://fr.wikipedia.org/wiki/Tourbillon_potentiel`.

Important : ce n'est pas la vorticité qui est conservée, mais le produit de la vorticité avec la température.

4 Formalisme lagrangien

Un formalisme plus puissant pour mettre en évidence le lien entre symétries et quantités conservées est le formalisme Lagrangien.

4.1 Lagrangien

Considérons un système dynamique repéré par des paramètres de position q_i (aussi appelés coordonnées généralisées). Au cours du temps, ces paramètres varient, leur taux de variation étant $\dot{q}_i = \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}$. L'ensemble des paramètres φ_i du système est constitué des q_i, des $\dot{q}_i$ et du temps t. Dans un grand nombre de situations, il est possible de définir une fonction $\mathcal{L}[\varphi_i]$ telle que, si on pose :

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

(la dérivée partielle étant calculée comme si les paramètres étaient indépendants entre eux), alors les équation du mouvement sont données par :

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \tag{25}$$

Formellement on constate que ces équations s'obtiennent par application du principe de moindre action (ou principe d'action extrémale), qui s'écrit :

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \varphi_i} = 0 \tag{26}$$

avec l'Action $\mathcal{S}[\varphi_i] = \int \mathcal{L}[\varphi_i(s)]\,\mathrm{d}^n s$.

Les équations du mouvement obtenues sont alors équivalentes aux équation d'Euler-Lagrange issues du principe précédent. Un système dynamique dont les équations du mouvement peuvent s'obtenir à partir d'un lagrangien est un système dynamique lagrangien. C'est le cas de la version classique du modèle standard (physique des particules), des Lois du mouvement de Newton, des équations de la relativité générale, et de problèmes purement mathématiques comme les équation des géodésiques.

4.2 Le Lagrangien de la mécanique classique

Le lagrangien de la mécanique classique est la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle, considérées comme des fonctionnelles.

$$\mathcal{L} = T - V = E_c - E_p \tag{27}$$

Les coordonnées sont alors les $q_{ij} = x_i, y_i, z_i$ de chaque particule dans le système, et leurs dérivées.

On retrouve

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t) \;=\; E_c - E_p \;=\; \frac{1}{2}\, m\, \vec{v}^2 \;-\; V(\vec{x}) \;=\; \frac{1}{2}\, m\, \dot{\vec{x}}^2 \;-\; V(\vec{x})$$

Les équations du mouvement sont donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i}\left(\frac{1}{2}\, m\, \dot{\vec{x}}^2\right) = m\,\dot{x}_i$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) = m\,\ddot{x}_i$$

$$m\,\ddot{x}_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0$$

Soit finalement le PFD :

$$m\ddot{\vec{x}} = -\vec{\nabla} V$$

4.3 Théorème de Noether

Théorème de Noether : À toute transformation infinitésimale qui laisse le Lagrangien d'un système invariant à une dérivée temporelle totale près correspond une grandeur physique conservée.

Démonstration

Soit un Lagrangien $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ qui dépend de N [[coordonnées généralisées]] $q_i = q_i(t)$, avec $i = 1, ..., N$. Selon le [[principe de moindre action]], l'action $S = \int L dt$ est stationnaire sur une trajectoire physique. Ceci mène directement aux [[équations d'Euler-Lagrange]] :

$$\forall i \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Aussi, sous une transformation infinitésimale des coordonnées $q_i \to q'_i = q_i + \alpha.\delta q_i$, si le Lagrangien est invariant à une dérivée temporelle totale près (c.-à-d. : $L \to L' = L + \alpha.\delta L = L + \alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(q_i, t)$, pour une fonction quelconque $F(q_i, t)$ qui ne dépend que des coordonnées généralisées et du temps), alors les équations du mouvement sont inchangées. Sous cette hypothèse, en calculant le Lagrangien au premier ordre du développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} \alpha.\delta L &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\alpha.\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\alpha.\delta \dot{q}_i && (28) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q_i}\alpha.\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha.\delta q_i && (29) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\alpha.\delta q_i\right) + \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\alpha.\delta q_i. && (30) \end{aligned}$$

Notons que le deuxième terme de la seconde ligne n'est autre que l'un des termes obtenable via la règle de Leibniz :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \cdot \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q_i) \tag{31}$$

Nous avons donc simplement remplacé $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \delta q_i$ par les autres termes de la règle en tenant compte du facteur α.

Enfin, dans notre dernier ligne, le deuxième terme est nul car il s'agit de l'équation d'Euler-Lagrange pour q_i. Ainsi, par comparaison avec l'hypothèse de départ, on a :

$$F(q_i, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.\delta q_i.$$

On définit la quantité conservée du système :

$$C(q_i, t) = F(q_i, t) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.\delta q_i = 0$$

car $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}C(q_i, t) = 0$.