LP06 – Cinématique relativiste

26 juin 2020

Aurélien Goerlinger & Yohann Faure

Niveau : L3

Bibliographie

- ✍ *Cours de Samtleben* Le dieu
- ✍ *Introduction à la relativité* **Langlois**
- ✍ *Relativité restreinte* **Simon**
- ✍ *Mécanique I* **BFR**
- ✍ *Relativité et invariance* **Pérez**

Prérequis

- ➢ Maxwell
- ➢ Relativité Galiléenne
- ➢ Mécanique
- ➢ Notations tensorielles
- ➢ Doppler classique
- ➢ Optique

Expériences

☕

Table des matières

1 Nécessité de la relativité restreinte **2**
1.1 Relativité galiléenne . . . 2
1.2 Electromagnétisme et translation . . . 2
1.3 Expériences déterminantes . . . 3
1.3.1 Expérience de Michelson . . . 4
1.3.2 Expérience de Fizeau . . . 5

2 Fondements de la relativité restreinte **6**
2.1 Postulats et définitions . . . 6
2.2 Transformation de Lorentz . . . 6
2.3 Composition des vitesses . . . 7

3 Conséquences **7**
3.1 Invariant relativiste . . . 7
3.2 Perte de simultanéité . . . 9
3.3 Dilatation des durées . . . 9
3.4 Effet Doppler relativiste . . . 10
3.5 Contraction des longueurs : paradoxe du train . . . 11

4 Annexe : Transformation galiléenne sur les équations de Maxwell **13**

Introduction

A la fin du 19e siècle, la physique était presque résolue, il ne restait que quelques problèmes à traiter à la marge. L'un d'eux est le mode de propagation de la lumière dans le vide qui restait inexpliqué. De plus, à l'époque, c'est la mécanique de Newton qui est reine, il faut donc trouver comment concilier l'électromagnétisme de Maxwell qui fait apparaître une vitesse c absolue et cette mécanique de Newton qui nous dit que la vitesse dépend du référentiel. On va commencer par étudier les limites de la mécanique classique.

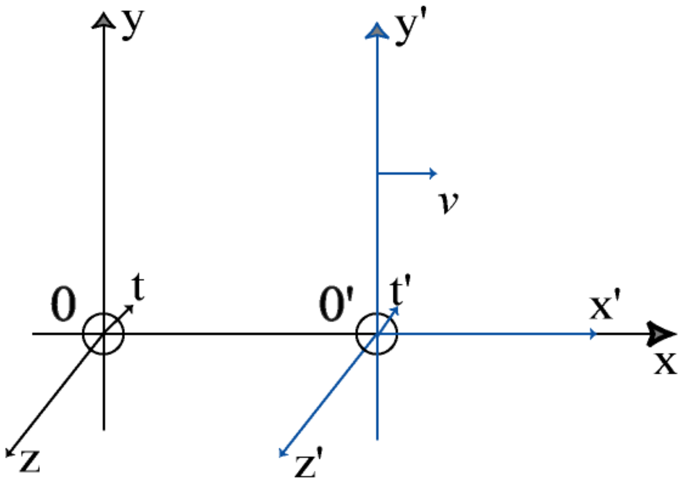
1 Nécessité de la relativité restreinte

1.1 Relativité galiléenne

Tout d'abord définissons la relativité de l'époque. C'est une relativité de l'espace, pas du temps. Le temps est le même pour tous les observateurs.

évenement = un couple (x, y, z, t).

Transfo de galilée = On passe de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ par une translation à vitesse uniforme, ici selon x. (On peut poser un temps t', mais il sera défini par une translation pure, de telle sorte que $\Delta t = \Delta t'$.)



$$t' = t \tag{1}$$
$$x' = x - vt \tag{2}$$
$$y' = y \tag{3}$$
$$z' = z \tag{4}$$

Sous une telle transfo, on peut écrire le PFD dans $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$ indéférement, il est invariant. Cependant les équations de l'électromagnétisme ne sont pas Galilée-invariantes.

1.2 Electromagnétisme et translation

Pour un petit calcul détaillé voir 4.

Les équations de Maxwell sont définies dans n'importe quel référentiel galiléen, et donnent le calcul suivant.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \tag{6}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \tag{7}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \tag{8}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0 \tag{9}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{B} = 0 \tag{10}$$

On fait apparaître une vitesse absolue, indépendante du référentiel choisi, qui est $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$.

Dès lors, deux cas sont possibles :

- il existe un référentiel privilégié telles que les équations de Maxwell sont exactes uniquement dans ce référentiel. Dans ce référentiel, la vitesse de propagation des phénomènes électromagnétiques est bien égale à c (la transformation de Galilée est alors respectée, mais le principe de relativité galiléenne est abandonné)
- les équations de Maxwell sont valables dans tous les référentiels galiléens sans distinctions, et la vitesse c reste la même dans tous les référentiels. (la transformation de Galilée ne fonctionne donc plus, mais le principe de relativité est toujours valable.)

Pour choisir, on fait appel à Michelson et Morley !

Tananana nanana Morleeeey !

1.3 Expériences déterminantes

1.3.1 Expérience de Michelson

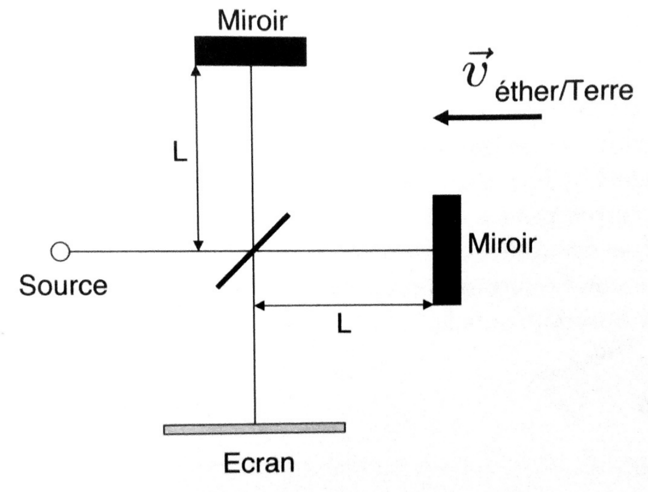


FIGURE 1 – Interféromètre de Michel.

https://en.wikipedia.org/wiki/Michelson-Morley_experiment

Les physiciens du 19eme siècle ont tout d'abord songé à la première hypothèse, à savoir l'existence d'un référentiel privilégié, nommé éther ($\mathcal{R}_e$). L'éther aurait été le milieu de propagation de l'électromagnétisme, ce qui colle encore plus avec le savoir de l'époque : une onde a forcément un milieu.

But : prouver que l'éther n'existe pas. Si on parvient à invalider l'hypothèse d'inexistence de l'éther, on prouve que l'éther existe.

Le but de cette expérience était de détecter par des moyens optiques d'interférométrie le mouvement de la Terre par rapport à l'éther. Une première hypothèse, facile à admettre et à considérer, consiste à dire que l'éther n'est pas lié à la Terre. Ainsi, si la vitesse de la lumière vaut c dans l'éther, elle vaut dans le référentiel Terrestre :

$$\vec{c}_{lum/Terre} = \vec{c}_{lum/Ether} - \vec{c}_{Terre/Ether} \tag{11}$$

On construit l'appareil de telle sorte que les miroirs M1 et M2 soient à égale distance, L, de la lame séparatrice.

Alors, si la Terre est immobile par rapport à l'éther, les deux trajets dans les deux directions perpendiculaires sont égaux (même distance parcourue, même durée de trajet).

Si, en revanche, la Terre est en mouvement par rapport à l'éther, à la vitesse v dans une direction (vers M1 par exemple), alors les deux trajets ne sont pas faits à la même vitesse, et le temps nécessaire n'est pas le même dans les deux directions :

• un aller et retour dans le sens de la marche de la Terre (vers M1) nécessite un temps $t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{2L \cdot c}{c^2 - v^2}$ soit, en négligeant les termes de second ordre : $\frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$.

• un aller-retour perpendiculairement à la marche de la Terre (vers M2) nécessite un temps $t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}}$ ou, dans la même approximation, $\frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right)$.

La différence de temps de parcours entre les deux trajets est alors :

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L\frac{v^2}{c^3} \tag{12}$$

On pose $\Delta\delta = c \cdot \Delta t$, et on calcule l'ordre d'interférence Δp par définition, et compte tenu de la vitesse orbitale de la Terre sur son orbite 30 km/s : $\Delta p = \frac{\Delta\delta}{\lambda} = \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda}$, ou encore

$$\Delta p = \frac{c \cdot \Delta t}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}\beta^2 \tag{13}$$

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 10^{-4} \tag{14}$$

Par exemple, dans le domaine visible pour la longueur d'onde $\lambda = 500$ nm $= 5 \times 10^{-7}$ m et pour un bras L $= 10$ mètres,

$$\Delta p = \frac{10}{5 \times 10^{-7}} \times 10^{-8} = 0.2 \text{ frange} \tag{15}$$

ce qui serait très visible et donc parfaitement observable. Or, l'expérience de Michelson-Morley n'a jamais permis une telle mesure : le résultat était toujours négatif.

Enfin, comme on ne sait pas a priori quelle est la vitesse de la Terre par rapport à l'éther, ni même si l'on n'est pas, par hasard, dans un endroit et à un moment où sa vitesse est nulle, il faut refaire l'expérience dans plusieurs directions, et avec plusieurs mois d'écart pour profiter du fait que la vitesse de la Terre par rapport à l'éther est modifiée.

1.3.2 Expérience de Fizeau

Pas utile à présenter mais intéressant à connaître...

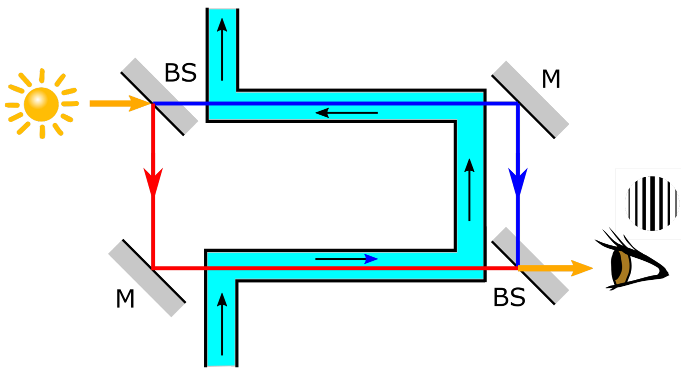


Figure 2 – L'expérience de Fizeau (en simplifié).

https://en.wikipedia.org/wiki/Fizeau_experiment

Même idée, l'éther est porté par l'eau, ce qui modifie la vitesse dans les deux bras et donne des franges d'interférence si on se démerde bien.

On a donc besoin de la relativité restreinte. On va maintenant voir quels sont ses principes et conséquences.

2 Fondements de la relativité restreinte

2.1 Postulats et définitions

La relativité restreinte repose sur 2 postulats fondamentaux :

- Les lois de la physique sont identiques dans tous les **référentiels inertiels** (c'est une généralisation de la première loi de Newton donc ce n'est pas contre-intuitif). Cela signifie que les relations traduisant des lois physiques (équations d'Alembert, de Maxwell, ...) ont la même structure dans des référentiels inertiels différents.
- La vitesse de la lumière est identique dans tous les **référentiels inertiels** (c'est contre-intuitif).

Cette leçon porte sur l'étude *cinématique*, donc on va surtout s'intéresser au second postulat.

Pour cela, quelques définitions :

- **Référentiel :** comme en mécanique classique, c'est une origine à laquelle on associe trois axes. La différence avec la mécanique classique réside dans le fait qu'on lui associe une horloge qui mesure le *temps propre* dans ce référentiel :
$$\mathcal{R}_{classique} = (\mathcal{O}, x, y, z) \to \mathcal{R}_{relat} = (\mathcal{O}, x, y, z, t) \tag{16}$$
- **Espace-temps :** espace à 4 dimensions (3 spatiales + 1 temporelle) dans lequel on décrit les évènements
- **Évènement :** point (x, y, z, t) de l'espace-temps

2.2 Transformation de Lorentz

On appelle *transformation de Lorentz* ou *boost de Lorentz* selon l'axe x la transformation permettant de passer d'un référentiel galiléen $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, x, y, z, t)$ à un autre référentiel galiléen $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}', x', y', z', t')$ en translation rectiligne uniforme selon l'axe x par rapport $\mathcal{R}$ tout en satisfaisant **l'invariance de la vitesse de la lumière**. Cette transformation s'écrit :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{17}$$

en introduisant le *facteur de Lorentz*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{18}$$

On peut également écrire cette transformation directement :

$$\begin{cases} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{19}$$

Remarquons que dans le cas où $v \ll c$, on a $\gamma \simeq 1$ et $\beta \ll 1$. On retrouve alors la transformation de Galilée

$$\begin{cases} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{cases} \tag{20}$$

2.3 Composition des vitesses

En différentiant les formules de transformation de Lorentz, on obtient

$$\begin{cases} \mathrm{d}t' &= \gamma(\mathrm{d}t - v\frac{\mathrm{d}x)}{c^2} \\ \mathrm{d}x' &= \gamma(\mathrm{d}x - v\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}y' &= \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' &= \mathrm{d}z \end{cases} \tag{21}$$

On obtient alors les vitesses dans $\mathcal{R}'$, *i.e.* la loi de composition des vitesses :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \\ \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \\ \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} \end{aligned}} \tag{22}$$

Remarquons de nouveau que dans le cas où $v \ll c$, on retrouve alors la loi classique d'addition des vitesses en mécanique Newtonienne.

Quelles sont les conséquences de la relativité restreinte ?

3 Conséquences

3.1 Invariant relativiste

Soient 2 évènements (x_1, y_1, z_1, t_1) et (x_2, y_2, z_2, t_2) dans le référentiel $\mathcal{R}$. On définit *le carré de l'intervalle d'espace-temps* $(\Delta s)^2$ par :

$$(\Delta s)^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{23}$$

On écrit également $(\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$.

Appliquons la transformation de Lorentz à cette quantité :

$$\begin{aligned}(\Delta s')^2 &= (c\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \\ &= (\gamma c\Delta t - \gamma\beta\Delta x)^2 - (\gamma x - \gamma\beta c\Delta t)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= \gamma^2(c\Delta t)^2 - 2\gamma^2\beta c\Delta t\Delta x + \gamma^2\beta^2(\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x)^2 + 2\gamma^2\beta c\Delta t\Delta x - \gamma^2\beta^2(c\Delta t)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= \gamma^2[1-\beta^2](c\Delta t)^2 - \gamma^2[1-\beta^2](\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - z^2 \\ &= (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \\ &= (\Delta s)^2\end{aligned} \tag{24}$$

La quantité $(\Delta s)^2$ est donc un *invariant relativiste*, c'est-à-dire que $(\Delta s)^2$ est invariant par transformation de Lorentz.

On peut lister plusieurs cas :

- $(\Delta s)^2 < 0$: l'intervalle espace-temps est dit *de genre espace*, on ne peut relier les évènements par un signal physique. Il n'existe pas de relation de cause à effet pour de tels évènements.
- $(\Delta s)^2 > 0$: l'intervalle espace-temps est dit *de genre temps*, on peut relier les évènements par un signal physique. On peut également définir plusieurs zones de l'espace-temps :
  - la zone où $\Delta t < 0$ désigne le passé ;
  - la zone où $\Delta t > 0$ désigne le futur
- $(\Delta s)^2 = 0$: c'est le *cône de lumière*, qui sépare les 2 zones indiquées ci-dessus.

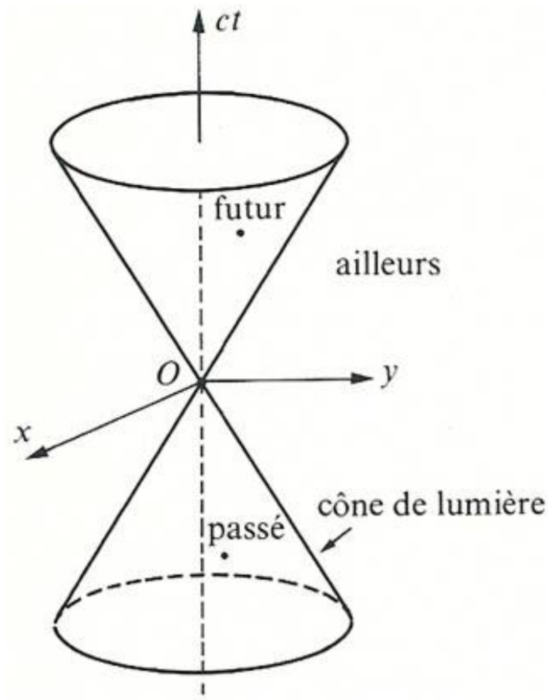


Figure 3 – Cône de lumière.

Par convention, on préfère manipuler non pas $(\Delta s)^2$ mais une quantité homogène à un temps, appelée *temps propre* et notée τ. On définit ce temps par la relation

$$(c\Delta\tau)^2 = (\Delta s)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 \tag{25}$$

On peut également définir le *temps propre infinitésimal* pour des intervalles **de genre temps** (*i.e.* $\mathrm{d}s^2 > 0$) par :

$$\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}s}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2}$$

3.2 Perte de simultanéité

La notion de simultanéité est un notion très intuitive. Il est ainsi difficile de concevoir que 2 évènements simultanés pour un observateur A ne le soit pas pour un observateur B. Pourtant, on a vu qu'en relativité restreinte, la notion de temps dépendait du référentiel est donc n'était plus absolue. La notion de simultanéité a-t-elle donc encore un sens ?

On considère un train de longueur L, se déplaçant à vitesse v constante. Un observateur situé au centre du train émet deux photons en même temps : le premier photon vers l'avant et le deuxième photon vers l'arrière. On note A l'évènement d'arrivée du premier photon au bout du train et B celui du deuxième photon. Ces évènements peuvent être décrits dans le référentiel $\mathcal{R}'$ du train ou dans $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre supposé inertiel (donc celui du train l'est aussi).

- dans $\mathcal{R}'$: le train est immobile, chaque photon parcourt la moitié du train en se déplaçant à la vitesse c. Alors
$$t'_A = \frac{L/2}{c} = t'_B$$
Les deux évènements sont alors simultanés.
- dans $\mathcal{R}$: le train bouge et les photons doivent parcourir des distances différentes, toujours à la vitesse c car c est absolue. Alors
$$\begin{cases} t_A = \dfrac{L/2 + vt_A}{c} \Rightarrow t_A = \dfrac{L/2}{c-v} \\ t_B = \dfrac{L/2 - vt_B}{c} \Rightarrow t_B = \dfrac{L/2}{c+v} \end{cases}$$
On voit alors que $t_A \neq t_B$: les évènements ne sont pas simultanés, le photon atteindra l'arrière du train avant que l'autre photon atteigne l'avant du train. On remarque que
$$t_A - t_B = \frac{\beta\gamma^2}{c} L$$

3.3 Dilatation des durées

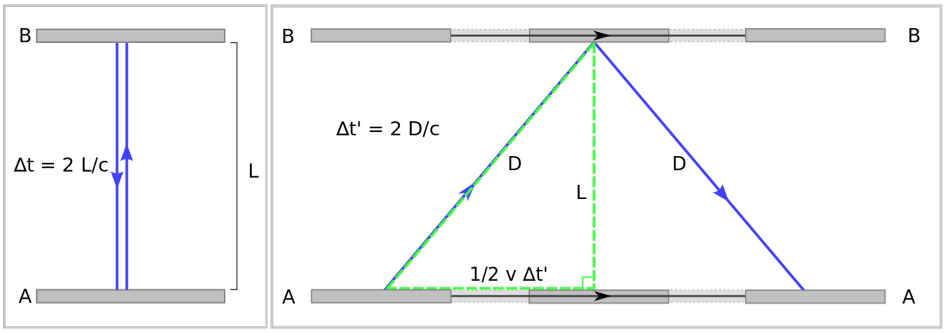


Figure 4 – Schéma de la situation.

Prenons un exemple bête et simple. On prend deux émetteurs-récepteurs immobiles dans le référentiel $\mathcal{R}$. L'un est en A, l'autre en B, séparés d'une distance L. Un aller retour d'information lumineuse entre les deux prend un temps de $\Delta t = \dfrac{2L}{c}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Supposons maintenant que les deux émetteurs soient dans une fusée à vitesse v. Le référentiel $\mathcal{R}'$ est donc en translation rectiligne uniforme à vitesse $-v$ dans $\mathcal{R}$. On observe le même évènement depuis $\mathcal{R}'$.

En regardant la fusée, on voit l'information lumineuse faire une distance $D = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v\Delta t'\right)^2 + L^2}$ supérieure à L. Or dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ la vitesse de la lumière est c, donc le temps de l'aller retour mesuré dans $\mathcal{R}'$ est $\Delta t' = \dfrac{2D}{c}$. On peut ainsi calculer $\Delta t'$ en fonction de Δt :

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t \tag{26}$$

Ainsi depuis le sol on voit un temps plus grand, la durée s'est dilatée. De mon point de vue, ma montre va plus vite que celle de l'astronaute, et du point de vue de l'astronaute, c'est l'inverse !

Parler de la durée de vie des muons ? Les muons ont une demie vie de 2.2μs. Plus rapide que la lumière ? NON, dilatation des durées.

3.4 Effet Doppler relativiste

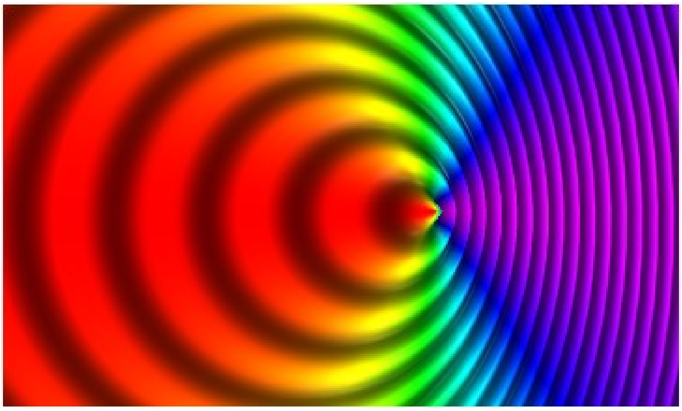


Figure 5 – Effet Doppler à $0.7c$ vers la droite.

On voit tout de suite, si on pense un peu à l'effet Doppler, que quelquechose de pas net se trame ici !

Supposons que l'observateur et la source s'éloignent l'un de l'autre à une vitesse relative de v, (v est négative si l'observateur et la source se déplacent l'un vers l'autre). Analysons ce problème depuis le référentiel de la source en supposant qu'un front d'onde arrive à l'observateur.

Le prochain front d'onde est donc à la distance $\lambda = c/f_s$ de lui (où λ est la longueur d'onde, f_s est la fréquence de l'onde au moment de son émission et c la vitesse de la lumière). Puisque le front d'onde se déplace à la vitesse c et que l'observateur se déplace à la vitesse v, la durée (telle que mesurée dans le référentiel de la source) entre les crêtes à l'arrivée est donnée par :

$$t = \frac{\lambda}{c - v} = \frac{c}{(c - v) f_s} = \frac{1}{(1 - \beta) f_s}$$

où $\beta = v/c$ est la vitesse de l'observateur en fonction de la vitesse de la lumière.

À cause de la dilatation du temps, l'observateur va mesurer cette durée comme étant : $t_o = \frac{t}{\gamma}$ où $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ est le facteur de Lorentz.

La fréquence observée correspondante est $f_o = \frac{1}{t_o} = \gamma(1 - \beta) f_s = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}\, f_s$.

Le rapport $\frac{f_s}{f_o} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$ est appelé *facteur de Doppler* de la source relative à l'observateur. Les longueurs d'onde correspondantes sont données par $\frac{\lambda_o}{\lambda_s} = \frac{f_s}{f_o} = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$ et le décalage vers le rouge, qui a lieu dans le cas où l'observateur et la source s'éloignent l'un de l'autre, $z = \frac{\lambda_o - \lambda_s}{\lambda_s} = \frac{f_s - f_o}{f_o}$ peut être écrit comme $z = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} - 1$.

Lorsque la vitesse n'est pas relativiste ($v \ll c$), ce décalage vers le rouge vaut environ $z \simeq \beta = \frac{v}{c}$, ce qui correspond à l'effet Doppler ordinaire.

3.5 Contraction des longueurs : paradoxe du train

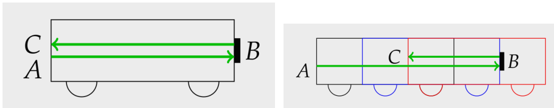


Figure 6 – I like trains.

Le paradoxe du train est une expérience de pensée destinée à illustrer des effets paradoxaux de la relativité restreinte : non-pertinence des notions de simultanéité et d'antériorité absolues et contraction des longueurs.

On prend un train qui roule à une vitesse v dans le référentiel $\mathcal{R}$. On définit par la présence d'une horloge dans le train un référentiel $\mathcal{R}'$ en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}$. On met un émetteur et un miroir d'un bout à l'autre du train, et on définit 3 évènements :

- A : émission d'un rayon
- B : Réflexion
- C : détection

On mesure la longueur du train par mesure de temps. Dans $\mathcal{R}'$ on a $2L' = c\Delta t'$ et dans $\mathcal{R}$ on a :

$$\begin{cases} AB & L + v\Delta t_1 = c\Delta t_1 \\ BC & L + v\Delta t_2 = c\Delta t_2 \end{cases} \tag{27}$$

D'où $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2L}{c}\gamma^2$, et finalement :

$$L' = \gamma L \tag{28}$$

Ainsi, il y a contraction des longueurs : un objet en mouvement paraît contracté ($L \leq L'$).

Là aussi, si deux objets vont dans des directions opposées, il sont chacun contractés l'un par rapport à l'autre.

morale de l'histoire : le train rentre et ne rentre pas, ça dépend du point de vue.

Conclusion

Ouverture : relativité générale into pétage de cul just like the simulations

Commentaires (oral blanc du 11 mars 2020)

- Parler des expériences de pensé avant la transformation de Lorentz ?
- L'invariant relativiste c'est un peu comme une distance dans l'espace temps. Il indique ce qui peut se passer ou non (selon son signe) si par exemple on émet un photon en (x_1, y_1, z_1, t_1) et qu'on veut savoir ce qui se passe en (x_2, y_2, z_2, t_2).
- Fizeau n'est pas très utile, mais si on veut en parler il faut en parler correctement.
- L'expérience de Michelson et Morley n'a rien mesuré et c'est comme ça qu'on a déduit l'absence de l'éther. L'expérience de Fizeau a mesuré c et montre que la transfo de Galilée n'est pas bonne et que la transfo de Lorentz est la bonne.
- Expérience de Kennedy–Thorndike = expérience de Michelson et Mortley mais avec 2 bras de longueurs différentes.
- Apparemment, on n'est pas obligé de postuler que c ne dépende pas du référentiel pour trouver la transfo de Lorentz. On pourrait aussi le faire en partant de l'équivalence de 2 référentiels inertiels et avec des hypothèses d'isotropie, d'homogénéité et, de symétries et d'invariances. Voir Levy-leblond (aeticle quand même velu) ou bien David Mermin(*American Journal of Physics*) qui retrouvent les lois de compositiion des vitesses relativistes sans passer par invariance de c.
- On pourrait montrer qu'un objet ne dépasse jamais c peut importante dans quel référentiel on se place (par exemple un objet allant à la vitesse $0.75c$ dans un référentiel allant également à $0.75c$ par rapport à l'observateur ne va quand même pas plus vite que c...
- Il faut bien expliquer la partie 'non-causalité' quand on n'est pas dans le cône de lumière (calculs ?)
- Il faudrait peut-être montrer que la transfo de Lorentz conserve bien c et que c'est isotrope (donc montrer que la transfo de Lorentz est compatible avec Michelson et Morley).
- Relier la contraction des longueurs avec la dilatation des durées ?

4 Annexe : Transformation galiléenne sur les équations de Maxwell

✍ https://physics.stackexchange.com/questions/378861/what-does-a-galilean-transformation-of-maxwells-equations-look-like

Consider two frames of reference S and S', and suppose that S' moves with speed **v** with respect to S. Coordinates in S and S' are related by a Galileian transformation :

$$\begin{cases} t' = t \\ \mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \end{cases} \tag{29}$$

To find how the fields transform, we note that a Lorentz transformation reduces to a Galileian transformation in the limit $c \to \infty$. In fact, under a Lorentz transformation the fields transform like :

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1)(\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{B}' = \gamma\left(\mathbf{B} - \dfrac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{E}\right) - (\gamma - 1)(\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{v}} \end{cases} \tag{30}$$

Taking the limit $c \to \infty$ so that $\gamma \to 1$, we obtain the Galileian transformations of the fields :

$$\begin{cases} \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' = \mathbf{B} \end{cases} \tag{31}$$

We can then invert the transformation by sending $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} = \mathbf{B}' \end{cases} \tag{32}$$

By the same reasoning, can obtain the Galileian transformation of the sources :

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{J}' + \rho'\mathbf{v} \\ \rho = \rho' \end{cases} \tag{33}$$

We know that the fields and sources satisfy Maxwell's equations in S :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{J} + \epsilon_0\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{34}$$

Replacing the fields and sources in S with those in S' we obtain :

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = \rho'/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B}' = 0 \\ \nabla \times (\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}') = -\dfrac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B}' = \mu_0\left(\mathbf{J}' + \rho'\mathbf{v} + \epsilon_0\dfrac{\partial(\mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}')}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{35}$$

As a last step, we need to replace derivatives in S with derivatives in S'. We have :

$$\begin{cases} \nabla = \nabla' \\ \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - \mathbf{v} \cdot \nabla \end{cases} \tag{36}$$

Substituting and removing the primes and using vector calculus, we obtain :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \rho/\epsilon_0 \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \rho \mathbf{v} + \epsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{v} \cdot \nabla(\mathbf{E} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \right) \end{cases} \tag{37}$$

In a vacuum, we can take the curl of the fourth equation to obtain :

$$c^2 \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)^2 \mathbf{B} - 2\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \tag{38}$$

Substituting a wave solution of the form

$$\mathbf{B} \sim \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t) \tag{39}$$

We obtain an equation for ω, which we can solve to obtain :

$$\omega = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{k} \pm c|\mathbf{k}| \tag{40}$$

Therefore the speed of propagation is the group velocity :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} = -\mathbf{v} \pm c\ \hat{\mathbf{k}} \tag{41}$$

which gives you the expected $c \pm v$ with an appropriate choice of $\mathbf{v}$ and $\mathbf{k}$.