

Mécanique analytique et relativité restreinte

Cours de Marc Magro, rédigé par Jérémy Sautel

1^{er} juillet 2015

Table des matières

1	Introduction et motivations	5
I -	Mécanique du point et électromagnétisme	5
II -	Mécanique quantique	5
III -	Physique statistique	6
IV -	Symétries	6
2	Formulation Lagrangienne	7
I -	Principes de relativité	7
1.	Mécanique classique	7
2.	Origines de la relativité restreinte d'Einstein	8
II -	Changements de coordonnées en formulation newtonienne	8
1.	Equations du mouvement	8
2.	Changement de coordonnées	9
III -	Formulation lagrangienne	10
1.	Energie cinétique	10
2.	Cas d'une force dérivant d'un potentiel indépendant de la vitesse .	11
3.	Cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique externe	13
IV -	Espace de configuration, liaisons	15
1.	Résumé	15
2.	Liaisons et multiplicateurs de Lagrange	16
3	Principe variationnel	18
I -	Introduction	18
II -	Principe de moindre action	18
1.	Action	18
2.	Enoncé du principe	18
III -	Equivalence avec la formulation lagrangienne	19
1.	Equations de Lagrange	19
2.	Non unicité du lagrangien	20
3.	Changement de coordonnées	21
4.	Remarques	21
IV -	Dérivée fonctionnelle et principe variationnel	21
1.	Dérivée fonctionnelle	21
2.	Méthode variationnelle	22

V - Principe variationnel et contraintes	23
1. Origine du problème	23
2. Motivation et analogie	23
3. Autre manière	25
4. Exemple	25
4 Symétries et lois de conservation	26
I - Motivations	26
1. Energie et quantité de mouvement	26
2. Constatations	26
II - Groupes continus de transformations	31
1. Définition	31
2. Exemples	32
3. Générateurs	32
III - Symétries	33
1. Définition	33
2. Condition suffisante pour symétrie	33
3. Théorème de Noether	34
4. Exemples	35
5 Formulation Hamiltonienne	39
I - Motivations	39
II - Définition de la formulation hamiltonienne	39
1. Moment conjugué et hamiltonien	39
2. Equations de Hamilton	41
3. Crochets de Poisson	43
4. Résumé	45
5. Remarques	46
III - Transformations canoniques	47
1. Motivations	47
2. Définition et propriétés	47
3. Fonctions génératrices	49
4. Symétries en formulation hamiltonienne	51
6 Introduction à la Relativité Restreinte	56
I - Conflit entre mécanique et électromagnétisme	56
1. Relativité galiléenne et structure sous-jacente de l'espace-temps . .	56
2. Electromagnétisme	58
II - Structure de l'espace-temps en relativité restreinte d'Einstein	59
1. Principes	59
2. Cône de lumière	60
3. Perte de la simultanéité absolue	61
4. Intervalle d'espace-temps	62
5. Métrique	63

III - Transformations de Lorentz pures	64
7 Transformations de Lorentz et leurs conséquences	65
I - Contraction des longueurs et dilatation du temps	65
1. Retour sur l'absence de simultanéité absolue	65
2. Contraction des longueurs	66
3. Dilatation des durées	67
4. Temps propre et repère propre instantané	68
II - Quadrivecteurs et tenseurs	69
1. Motivations	69
2. Vecteurs	69
3. Formes linéaires	70
4. Tenseurs	71
5. Métrique	72
6. Ce qu'il faut retenir	73
III - Quadrivecteur vitesse	75
1. Retour sur l'intérêt des tenseurs	75
2. Quadrivecteur vitesse	75
IV - Effet Doppler relativiste	76
V - A propos des paradoxes	77
VI - Groupes de Lorentz et de Poincaré	79
8 Dynamique relativiste	82
I - Equation de la dynamique	82
II - Action de la particule relativiste libre	82
III - Quadrivecteur Energie-Impulsion	84
IV - Ordres de grandeur (1ère partie)	85
V - Application aux collisions	85
1. Absence de conservation de la masse totale	86
2. Energie de liaison	86
VI - Ordres de grandeur (2nde partie)	87

1 Introduction et motivations

Résumé des connaissances en physique fondamentale :

	Mécanique du point	Electromagnétisme
Variables	Position $\vec{r}(t)$	Champs $\vec{E}(\vec{x}, t)$ et $\vec{B}(\vec{x}, t)$
Equations fondamentales	$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$	Equations de Maxwell

But du cours : deux autres formulations de la mécanique (lagrangienne et hamiltonienne), équivalentes à celle de Newton.

Intérêt ?

i) Toujours intéressant d'avoir plusieurs formulations d'un problème.

ii) Les systèmes que l'on sait résoudre de manière exacte sont rares (il y en a peu à part l'oscillateur harmonique). Mais il existe une classe de systèmes que l'on peut résoudre de manière exacte dans le cadre de la formulation hamiltonienne, ce sont les **systèmes intégrables**.

On peut alors avoir besoin d'une théorie de perturbations (cf. mécanique céleste).

iii) Mise en évidence de structures importantes qui sont présentes mais cachées dans la formulation newtonienne.

I - Mécanique du point et électromagnétisme

A priori, les formulations de la mécanique du point et de l'électromagnétisme diffèrent (l'équation différentielle fondamentale de la mécanique du point est d'ordre 2, alors que les équations de Maxwell sont d'ordre 1).

Mais la formulation lagrangienne permet de traiter à la fois la mécanique et l'électromagnétisme (cf. premier semestre de M1).

Et la formulation hamiltonienne permet aussi de traiter à la fois la mécanique et l'électromagnétisme (cf. M2).

II - Mécanique quantique

La formulation newtonienne ne se généralise pas à la mécanique quantique.

Le passage de la mécanique quantique à la mécanique classique se fait lorsque la constante de Planck réduite \hbar tend vers 0. La formulation hamiltonienne donne un cadre à la méthode canonique de quantification de l'énergie.

Une manière de faire de la mécanique quantique est par ailleurs proche de la formulation lagrangienne, elle est due à Feynman et consiste en l'utilisation de l'intégrale de chemin.

A noter que ce concept a joué un rôle historique dans l'avènement de la mécanique quantique.

III - Physique statistique

La formulation hamiltonienne est importante pour la physique statistique, notamment en raison de la notion d'espace des phases (cf. théorème de Liouville).

IV - Symétries

Les symétries par rapport à un groupe continu de transformations (cela signifie que le(s) paramètre(s) de la transformation est (sont) continu(s)) jouent un rôle primordial en physique fondamentale.

Exemples : les translations spatiales, temporelles et les rotations. On peut également citer les transformations de jauge en électromagnétisme.

Toutes les interactions fondamentales sont basées sur un groupe de transformations précis.

Les formulations lagrangienne et hamiltonienne mettent clairement en évidence l'existence et les conséquences de symétries par rapport à un groupe continu de transformations.

Plan du cours (pour la partie mécanique analytique) :

- Formulation lagrangienne ;
- Principe variationnel ;
- Symétries ;
- Formulation hamiltonienne.

2 Formulation Lagrangienne

But et plan du chapitre :

- Bref rappel des principes de relativité ;
- Discussion de l'importance des changements de coordonnées ;
- Constat de la mauvaise adaptation de la formulation newtonienne aux changements de coordonnées ;
- Construction de la formulation lagrangienne, bien adaptée aux changements de coordonnées.

I - Principes de relativité

Il s'agit de bien faire la différence entre les concepts liés mais différents que sont le changement de coordonnées, la relativité, et les symétries.

1. Mécanique classique

(c'est-à-dire hors relativité restreinte et hors mécanique quantique)

1.1. Référentiels d'inertie

Il s'agit d'observateurs privilégiés.

Définition théorique : dans un référentiel d'inertie, si la force totale agissant sur une particule est nulle, alors son accélération est nulle.

1.2. Transformations de Galilée

Soit \mathcal{O} un observateur d'inertie, associé à un repère \mathcal{R} dans lequel on a le vecteur position \vec{r} .

Soit \mathcal{O}' en mouvement de translation uniforme à vitesse \vec{v}_e par rapport à \mathcal{O} . \mathcal{O}' est alors associé au repère \mathcal{R}' et au vecteur position \vec{r}' .

On a la transformation de Galilée : $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t$ et $t' = t$.

\mathcal{O} et \mathcal{O}' sont alors deux observateurs d'inertie (ou observateurs Galiléens).

1.3. Groupe de Galilée

Le groupe de Galilée est un groupe de transformations formé par :

- les transformations de Galilée ($\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t$ et $t' = t$);
- les translations spatiales ($\vec{r}' = \vec{r} + \vec{d}$ et $t' = t$);
- les translations temporelles ($\vec{r}' = \vec{r}$ et $t' = t + \tau$);
- les rotations ($\vec{r}' = \text{Rot}(\vec{r})$ et $t' = t$).

1.4. Principe de relativité galiléenne

Les lois de la physique fondamentale (interactions gravitationnelle, coulombienne) sont invariantes sous les transformations du groupe de Galilée.

Exemple :

Considérons des particules de masses m_i en interaction gravitationnelle, observées par \mathcal{O} et \mathcal{O}' introduits au 1.2.

Pour \mathcal{O} , on a $m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$.

Pour \mathcal{O}' , $\vec{r}'_i = \vec{r}_i - \vec{v}_e t$ et $t' = t$, ce qui fait que l'on retrouve :

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}'_i}{dt^2} = G \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\vec{r}'_j - \vec{r}'_i)}{\|\vec{r}'_j - \vec{r}'_i\|^3}.$$

Les deux observateurs donnent donc la même équation différentielle.

Conclusion : les observateurs galiléens sont privilégiés.

2. Origines de la relativité restreinte d'Einstein

La vitesse de la lumière est indépendante du référentiel, ce qui rentre en contradiction avec la relativité galiléenne.

De plus, les invariances de Galilée sont différentes des invariances de Lorentz.

Tout cela sera développé dans les derniers chapitres, consacrés à la relativité restreinte d'Einstein.

II - Changements de coordonnées en formulation newtonienne

1. Equations du mouvement

Soient un observateur galiléen \mathcal{O} et une particule de masse m **sans liaison** (c'est-à-dire non contrainte à se déplacer sur un cercle, par exemple).

Cette particule est soumise aux forces fondamentales (gravitation, électromagnétisme).

On note O l'origine du repère, M la position de la particule et $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

On note enfin \vec{F} la force totale agissant sur la particule. Alors on a :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}.$$

Repère cartésien orthonormé : $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

$$\vec{OM} = X_1 \vec{e}_1 + X_2 \vec{e}_2 + X_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 X_i \vec{e}_i = X_i \vec{e}_i.$$

Convention d'Einstein : la somme se fait sur les **indices muets répétés**, plus besoin donc de noter le signe somme habituel.

$$\text{On a en fait } A_i B_i = A_j B_j = A_{tartampion} B_{tartampion} = \sum_{i=1}^3 A_i B_i.$$

Ici, on a pris une particule sans liaison, les $\{X_i\}$ sont donc indépendants.

Si la particule se déplaçait sur un cercle de rayon R , on aurait $\sum_{i=1}^3 X_i^2 = X_i X_i = R^2$.

On écrit la force totale : $\vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \vec{e}_i = F_i \vec{e}_i$. On a alors :

$$\boxed{m \ddot{X}_i(t) = F_i(X_j(t), \dot{X}_j(t), t)}$$

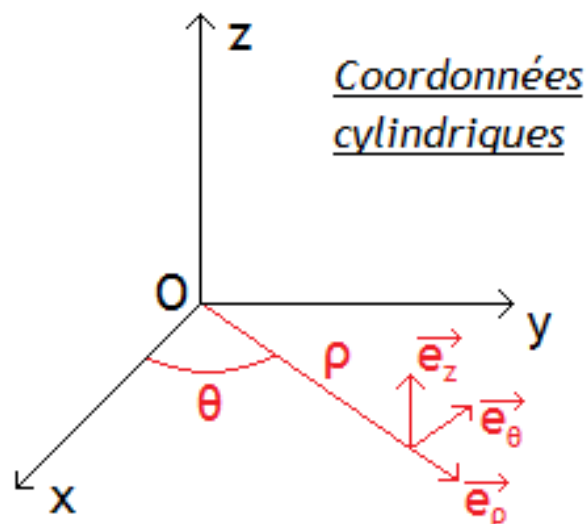
Bien sûr, on note ici $\dot{A} = \frac{dA}{dt}$ et $\ddot{A} = \frac{d^2 A}{dt^2}$.

Dans le cas où \vec{F} dérive d'un potentiel $V_0(X_i, t)$, on a :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} V_0 = -\vec{\nabla} V_0, \text{ avec } \nabla_i = \frac{\partial}{\partial X_i}, \text{ d'où } \boxed{m \ddot{X}_i(t) = -\nabla_i V_0}.$$

2. Changement de coordonnées

Exemple : des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques.



Rappels : on a $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$.

Donc $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$, d'où $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$

et $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$.

Pour un potentiel V , on a alors $\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial \rho}\right) \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) \vec{e}_z$.

L'équation du mouvement $m \ddot{\vec{r}}(t) = -\vec{\nabla} V$ s'écrit alors :

	Cartésiennes	Cylindriques
Première coordonnée	$m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$	$m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$
Deuxième coordonnée	$m\ddot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$	$m(\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \theta}$
Troisième coordonnée	$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$	$m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$

Les équations différentielles n'ont clairement pas la même forme dans les deux systèmes de coordonnées. Cela signifie que l'écriture des équations de Newton n'est **pas covariante** sous les changements de coordonnées.

PREMIER BUT DE LA FORMULATION LAGRANGIENNE :

Obtenir une écriture des équations du mouvement qui soit covariante sous les changements de coordonnées.

III - Formulation lagrangienne

1. Energie cinétique

On a, en formulation newtonienne, $m\ddot{X}_i(t) = F_i(X, \dot{X}, t)$.

En cartésiennes, l'énergie cinétique s'écrit $T_0 = \frac{1}{2}m \sum_{j=1}^3 \dot{X}_j^2$.

On la considérera comme une fonction de la position, de la vitesse et du temps (qui sont elles mêmes considérées comme trois variables indépendantes) : $T_0(X, \dot{X}, t)$.

Au passage, on rappelle la définition du symbole de Kronecker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Calculons $\frac{\partial T_0}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{X}_i} \left(\frac{1}{2}m \sum_{j=1}^3 \dot{X}_j^2 \right) = \frac{1}{2}m \sum_{j=1}^3 2\dot{X}_j \frac{\partial \dot{X}_j}{\partial \dot{X}_i} = m \sum_{j=1}^3 \dot{X}_j \delta_{ij} = m\dot{X}_i$.

Donc $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{X}_i} \right) = m\ddot{X}_i$. Et il est clair que $\frac{\partial T_0}{\partial X_i} = 0$.

Donc en fait $m\ddot{X}_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial T_0}{\partial X_i}$.

Du coup l'équation du mouvement $m\ddot{X}_i(t) = F_i(X, \dot{X}, t)$ équivaut à :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial X_i} = F_i$$

2. Cas d'une force dérivant d'un potentiel indépendant de la vitesse

2.1. Equations

On a alors $V_0(X_i, t)$ et $\vec{F} = -\vec{\nabla} V_0$.

En particulier, on a $\frac{\partial V_0}{\partial \dot{X}_i} = 0$ et $F_i = -\frac{\partial V_0}{\partial X_i}$.

Donc $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial X_i} = -\frac{\partial V_0}{\partial X_i}$, d'où $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial(T_0 - V_0)}{\partial X_i} = 0$, et vu que $\frac{\partial V_0}{\partial \dot{X}_i} = 0$, on a finalement l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T_0 - V_0)}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial(T_0 - V_0)}{\partial X_i} = 0$$

On définit alors le **lagrangien** : $L_0(X_i, \dot{X}_i, t) = T_0 - V_0$

Les équations du mouvement sont alors équivalentes aux équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial X_i} = 0$$

2.2. Changement de coordonnées

On définit les coordonnées généralisées $\{q_j\}$, $\forall j, q_j = q_j(X_i, t)$.

La dépendance en temps est une éventualité, elle n'est pas toujours effective.

On considère un changement de coordonnées inversible, on a $X_i = X_i(q_j, t)$.

De plus, la matrice de coefficients $\frac{\partial q_j}{\partial X_i}$ (jacobienne du changement de coordonnées)

est alors inversible. Son inverse de coefficients $\frac{\partial X_i}{\partial q_k}$ est telle que $\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \frac{\partial X_i}{\partial q_k} = \delta_{jk}$.

On définit alors le lagrangien généralisé : $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = L_0(X_i(q_j, t), \dot{X}_i(q_j, \dot{q}_j, t), t)$

On a alors $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial X_i} = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right\}\left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i}\right)$.

La matrice $\left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i}\right)$ étant inversible, on a l'équivalence :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial X_i} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0.$$

Préliminaires techniques pour la suite :

i) On a $q_i(X, t)$ donc $dq_i = \frac{\partial q_i}{\partial t} dt + \frac{\partial q_i}{\partial X_k} dX_k$. On en déduit

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial X_k} \dot{X}_k \quad (2.1)$$

On a alors aussi $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{X}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{X}_j} \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial X_k} \dot{X}_k \right) = \frac{\partial q_i}{\partial X_k} \delta_{jk}$, d'où :

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial \dot{X}_j} = \frac{\partial q_i}{\partial X_j} \quad (2.2)$$

ii) Calculons $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j(X_k, t)}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right) + \frac{\partial}{\partial X_k} \left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right) \dot{X}_k$.

Donc $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial^2 q_j}{\partial t \partial X_i} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial X_k \partial X_i} \dot{X}_k$. Or, d'après (2.1), on a $\dot{q}_j = \frac{\partial q_j}{\partial t} + \frac{\partial q_j}{\partial X_k} \dot{X}_k$, donc $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial X_i} = \frac{\partial^2 q_j}{\partial X_i \partial t} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial X_i \partial X_k} \dot{X}_k$. On retrouve donc la même expression, et on alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial X_i} \quad (2.3)$$

iii) On sait que $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = L_0(X_i(q_j(t), t), \dot{X}_i(q_j(t), \dot{q}_j(t), t), t)$.

iv) Alors $\frac{\partial L_0(X, \dot{X}, t)}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial L(q(X, t), \dot{q}(X, \dot{X}, t), t)}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{X}_i}$.

Donc en utilisant (2.2), qui nous donne $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial q_j}{\partial X_i}$, on a :

$$\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial X_i} \quad (2.4)$$

v) De $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = L_0(X_i(q_j(t), t), \dot{X}_i(q_j(t), \dot{q}_j(t), t), t)$, on tire également :

$$\frac{\partial L_0}{\partial X_i} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial X_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial X_i} \quad (2.5)$$

vi) En utilisant (2.4), on a $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial q_j}{\partial X_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right)$.

Or (2.3) nous donne $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right) = \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial X_i}$, d'où $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i} \right) = \frac{\partial q_j}{\partial X_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial X_i}$.

Et d'après (2.5), on a $\frac{\partial L_0}{\partial X_i} = \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial X_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial X_i}$, et donc :

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i} \right) = \frac{\partial q_j}{\partial X_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial L_0}{\partial X_i} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial X_i}$. Et finalement on a :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial X_i} = \frac{\partial q_j}{\partial X_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial X_i} = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \frac{\partial q_j}{\partial X_i}.$$

Et vu que la matrice des $\left(\frac{\partial q_j}{\partial X_i} \right)$ est inversible, on a l'équivalence suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial L_0}{\partial X_i} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] = 0.$$

Les équations du mouvement (équations d'Euler-Lagrange) ont donc la même écriture dans les deux systèmes de coordonnées.

Les équations d'Euler-Lagrange sont covariantes sous les changements de coordonnées.

Remarques :

En formulation newtonienne, ces propriétés de covariance sont cachées.

Autre avantage de la formulation lagrangienne : l'objet fondamental est un scalaire (le lagrangien L) et non un vecteur (le vecteur position \vec{r}) comme en formulation newtonienne.

2.3. Application aux coordonnées cylindriques

On part de $(X_1, X_2, X_3) = (x, y, z)$ pour arriver à $(q_1, q_2, q_3) = (\rho, \theta, z)$.

On calcule le lagrangien $L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{\vec{r}})^2 - V(\rho, \theta, z)$.

Donc $L(\rho, \theta, z, \dot{\rho}, \dot{\theta}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(\rho, \theta, z)$.

On a $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = 0$, soit $\frac{d}{dt}(m\dot{\rho}) - m\rho\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial \rho} = 0$.

On retrouve donc finalement : $m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) = -\frac{\partial V}{\partial \rho}$.

De plus, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$, soit $\frac{d}{dt}(m\rho^2\dot{\theta}) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Leftrightarrow 2m\dot{\rho}\dot{\theta} + m\rho^2\ddot{\theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$.

On retrouve donc finalement : $m(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \theta}$.

Enfin, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$, soit $\frac{d}{dt}(m\dot{z}) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \Leftrightarrow m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$.

On retrouve donc finalement : $m\ddot{z} = -\frac{\partial V}{\partial z}$.

3. Cas d'une particule chargée dans un champ électromagnétique externe

3.1. Retour sur la discussion précédente

On a vu que $m\ddot{X}_i = F_i(X, \dot{X}, t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial T_0}{\partial X_i} = F_i(X, \dot{X}, t)$.

On a aussi vu que l'opérateur $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial X_i}$ a de bonnes propriétés sous les changements de coordonnées.

Imaginons maintenant que l'on ait $F_i(X, \dot{X}, t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial V_0}{\partial X_i}$, où $V_0(X, \dot{X}, t)$ est un potentiel généralisé.

En définissant $L_0 = T_0 - V_0$, on aurait donc toujours $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_0}{\partial \dot{X}_i}\right) - \frac{\partial L_0}{\partial X_i} = 0$.

3.2. Lagrangien

Une particule chargée dans un champ électromagnétique externe est soumise à la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

Montrons qu'il existe un potentiel généralisé V_0 tel que $F_i(X, \dot{X}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial V_0}{\partial X_i}$.

On sait d'ores et déjà qu'il existe un potentiel scalaire $\phi(\vec{X}, t)$ et un potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{X}, t)$ tels que $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$.

Premier terme de \vec{F} :

On écrit alors $q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi - q\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Or $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial X_i} \dot{X}_i = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$.

Donc en fait $q\vec{E} = -q\vec{\nabla}\phi - q\frac{d\vec{A}}{dt} + q(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$.

Second terme de \vec{F} :

On écrit $q\vec{v} \wedge \vec{B} = q\vec{v} \wedge \text{rot}(\vec{A}) = q\vec{v} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = q\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - q(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$.

Alors on a $\vec{F} = -q\vec{\nabla}\phi - q\frac{d\vec{A}}{dt} + q(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + q\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A}) - q(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A}$, d'où

$$\boxed{\vec{F} = -q\vec{\nabla}\phi - q\frac{d\vec{A}}{dt} + q\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})}$$

Or on souhaite avoir $F_i(X, \dot{X}, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial V_0}{\partial X_i}$.

Posons donc $\boxed{V_0 = q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A})}$.

Alors $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial V_0}{\partial X_i} = \frac{d}{dt}(-qA_i) - q\frac{\partial \phi}{\partial X_i} + q\frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{A})}{\partial X_i} = -q\frac{\partial \phi}{\partial X_i} - q\frac{dA_i}{dt} + q\frac{\partial(\vec{v} \cdot \vec{A})}{\partial X_i}$.

Et vu que $\vec{F} = -q\vec{\nabla}\phi - q\frac{d\vec{A}}{dt} + q\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{A})$, on a bien $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \dot{X}_i} \right) - \frac{\partial V_0}{\partial X_i} = F_i(X, \dot{X}, t)$.

\vec{F} dérive donc bien du potentiel généralisé V_0 .

Remarques :

Les transformations de jauge possibles sur V et \vec{A} affaiblissent ici le formalisme lagrangien par rapport au formalisme newtonien.

En mécanique quantique, le hamiltonien d'une particule chargée dans un champ magnétique permet de prévoir l'effet Aharonov-Bohm, car \vec{B} ne déborde pas du solénoïde qui le crée, mais le potentiel vecteur \vec{A} , par contre, en déborde.

3.3. Transformations de jauge

Il s'agit, par définition, de transformations modifiant V et \vec{A} mais laissant toutefois \vec{E} et \vec{B} invariants. Typiquement, elles sont de la forme :

$$\begin{aligned}\phi &\mapsto \tilde{\phi} = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}. \\ \vec{A} &\mapsto \tilde{\vec{A}} = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda.\end{aligned}$$

où $\Lambda(\vec{X}, t)$ est un champ scalaire quelconque.

Calculons alors le nouveau lagrangien : $\tilde{L}_0 = T_0 - \tilde{V}_0 = T_0 - q(\tilde{\phi} - \vec{v} \cdot \tilde{\vec{A}})$.
 $\tilde{L}_0 = T_0 - q(\phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} - \vec{v} \cdot (\vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda)) = T_0 - q(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}) + q \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + q \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Lambda$.
Donc $\tilde{L}_0 = L_0 + q \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + q \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Lambda = L_0 + q(\frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Lambda) = L_0 + q \frac{d\Lambda}{dt}$.
Donc sous une transformation de jauge :

$$L_0 \mapsto \tilde{L}_0 = L_0 + q \frac{d\Lambda(\vec{X}, t)}{dt}.$$

Or il a été vu au TD 1 que l'ajout au lagrangien de la dérivée temporelle totale d'une fonction ne dépendant que de la position et du temps ne modifie pas les équations du mouvement. Autrement dit, le lagrangien n'est pas unique, et les lagrangiens $L(q, \dot{q}, t)$ et $\tilde{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}$ donnent les mêmes équations d'Euler-Lagrange.

IV - Espace de configuration, liaisons

1. Résumé

- Un système de N particules sans liaisons est décrit par un point $P(t)$ dans un espace à $3N$ dimensions, appelé espace de configuration.
 - On adopte alors un système de coordonnées généralisées $q_i, i = 1, \dots, 3N$.
 - Dans de nombreux cas, on peut réécrire les équations du mouvement en les formulant de la manière suivante :
 - $L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - V$ où T est l'énergie cinétique totale et V l'énergie potentielle généralisée ;
 - On a alors les équations d'Euler-Lagrange : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$;
 - On dispose également des conditions initiales, elles sont au nombre de $6N$ (les position et vitesse initiales de chacune des particules) ;
 - Sous changement de coordonnées $q'_i = q'_i(q_j, t)$, on a :
 $L'(q', \dot{q}', t) = L(q(q', t), \dot{q}(q', \dot{q}', t), t)$ et $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i}) - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = 0$ (COVARIANCE).
- On rappelle que L et L' sont en général des fonctions différentes.

2. Liaisons et multiplicateurs de Lagrange

On s'intéresse par exemple au cas du pendule simple :

- en formulation newtonienne, on considère une particule libre puis on ajoute des forces de rappel ;
- en formulation lagrangienne, on dispose de deux méthodes.

Méthode 1 :

On part du lagrangien de la particule sans contraintes.

On ajoute ensuite des **contraintes holonomes**, c'est-à-dire des contraintes ne dépendant pas de la vitesse. Autrement dit, des fonctions f_n telles que $f_n(q_i, t) = 0$.

Par exemple, si la particule est contrainte à se déplacer sur une sphère de rayon R , on considérera $f(X, Y, Z) = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - R$ car alors $f = 0$.

Si les différentes liaisons (dans le cas où il y en aurait plusieurs) sont indépendantes entre elles, la matrice $(\frac{\partial f_n}{\partial q_i})$ est inversible.

Pour le pendule simple, en coordonnées cylindriques, on a, avant de tenir compte de la contrainte, $L(r, \dot{r}, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + mgr \cos \theta$.

On impose alors $r = l$ (longueur du pendule) et $\dot{r} = 0$.

On obtient alors $\tilde{L}(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta$.

On résout donc $0 = \frac{d}{dt}(\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}}) - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\theta}) + mgl \sin \theta = ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta$.

Ce qui nous donne l'équation bien connue $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}$.

On peut aussi opérer un changement de coordonnées revenant à remplacer les premières coordonnées par les contraintes, ce qui revient donc à les annuler. Ici par exemple, on aurait pu passer de (r, θ, z) à $(r - l, \theta, z)$.

Méthode 2 :

C'est la méthode des **multiplicateurs de Lagrange**. Elle est **systématique** pour traiter les problèmes présentant des contraintes.

Soit un système Σ à $3N$ degrés de liberté.

On va alors considérer $\bar{\Sigma}$, à $3N + r$ degrés de liberté, où r est le nombre des contraintes imposées au système Σ . Les r contraintes sont représentées par des fonctions $f_n(q_i, t)$, comme vu dans la méthode 1. On écrit alors un nouveau lagrangien :

$$\boxed{\bar{L}(q_i, \dot{q}_i, \lambda_j, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \lambda_n f_n(q_i, t)}$$

où $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ est le lagrangien du système sans contraintes, et où les λ_n sont les multiplicateurs de Lagrange.

Les équations d'Euler-Lagrange pour λ_n sont alors covariantes.

Autrement dit, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\lambda}_n}) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda_n} = 0 \Leftrightarrow f_n(q_i, t) = 0$.

Une fois ce nouveau lagrangien défini, on écrit les équations d'Euler-Lagrange par rapport aux coordonnées q_i : $\frac{d}{dt}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = 0$.

Par ailleurs, $\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ vu que les f_n sont indépendantes des \dot{q}_i (car les contraintes sont holonomes). De plus, $\frac{\partial \bar{L}}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_i}$.

Donc en fait, $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_i} = 0$, d'où :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \lambda_n \frac{\partial f_n}{\partial q_i}}$$

C'est-à-dire que l'on a égalité entre ce que l'on aurait écrit sans les contraintes et un terme correspondant aux forces de rappel de la formulation newtonienne.

Cas du pendule simple :

En restant en coordonnées cartésiennes, on pose $f(X, Y) = \sqrt{X^2 + Y^2} - l$.

On a alors $\bar{L}(X, \dot{X}, Y, \dot{Y}, \lambda) = \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2) - mgY + \lambda(\sqrt{X^2 + Y^2} - l)$.

$$0 = \frac{d}{dt}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{X}}) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial X} = \frac{d}{dt}(m\dot{X}) - \frac{2\lambda X}{2\sqrt{X^2 + Y^2}} = m\ddot{X} - \frac{\lambda X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

$$0 = \frac{d}{dt}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Y}}) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Y} = \frac{d}{dt}(m\dot{Y}) + mg - \frac{2\lambda Y}{2\sqrt{X^2 + Y^2}} = m\ddot{Y} + mg - \frac{\lambda Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}.$$

$$0 = \frac{d}{dt}(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\lambda}}) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial \lambda} = \sqrt{X^2 + Y^2} - l.$$

$$\text{On a donc } m\ddot{X} = \frac{\lambda X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, m(\ddot{Y} + g) = \frac{\lambda Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \text{ et } \sqrt{X^2 + Y^2} = l.$$

3 Principe variationnel

I - Introduction

On ne considérera dans ce chapitre que des systèmes classiques admettant une formulation lagrangienne.

But :

Montrer l'équivalence entre les équations d'Euler-Lagrange et le principe variationnel.

Intérêts :

- 1) Les principes variationnels sont fréquents en physique (par exemple, le principe de Fermat en optique) ;
- 2) Les forces fondamentales obéissent à un tel principe ;
- 3) Traitement des symétries ;
- 4) Intégrale de chemin en mécanique quantique ;
- 5) Covariance des équations d'Euler-Lagrange ;
- 6) Liaisons ;
- 7) Plus généralement, être capable d'écrire un principe variationnel.

II - Principe de moindre action

1. Action

L'action est un scalaire, c'est une quantité primordiale définie par :

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

D'un point de vue dimensionnel, $[Lagrangien] = [M][L]^2[T]^{-2}$ (énergie).

Et donc $[Action] = [M][L]^2[T]^{-1}$ (même dimension que la constante de Planck).

S est une fonctionnelle, elle dépend des fonctions $q_i(t)$.

2. Enoncé du principe

On fixe deux points dans l'espace de configuration :

P_1 décrit le système à l'instant t_1 ;

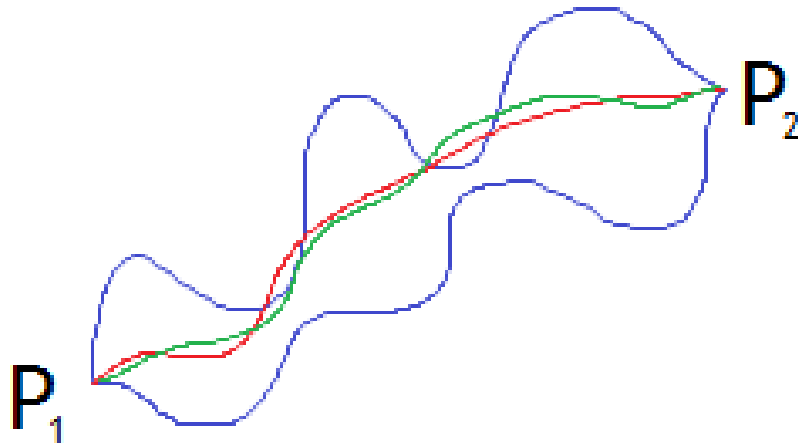
P_2 décrit le système à l'instant t_2 .

On cherche la trajectoire physique entre t_1 et t_2 .

Entre $P_1(t_1)$ et $P_2(t_2)$, le système évolue de telle manière que l'action :

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt \text{ soit minimale (stationnaire).}$$

Exemple :



En rouge, on a représenté la trajectoire physique, notée $\tilde{P}(t)$ ou $\tilde{q}(t)$.

En vert, une trajectoire proche de la trajectoire physique $q(t) = \tilde{q}(t) + \delta q(t)$ avec $\delta q(t)$ infinitésimal et tel que $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$.

Variation d'action au premier ordre en δq autour de la trajectoire physique :

$$\delta S = S[\tilde{q} + \delta q] - S[\tilde{q}] = 0.$$

Cette variation est nulle car la trajectoire physique correspond à un extremum.

III - Equivalence avec la formulation lagrangienne

1. Equations de Lagrange

1.1. Variation de l'action

On se place dans le cas général, avec $\delta(t_1) = \delta(t_2) = 0$.

$$\begin{aligned} \delta S &= S[\tilde{q} + \delta q] - S[\tilde{q}] = \int_{t_1}^{t_2} [L(q_i(t) + \delta q_i(t), \dot{q}_i(t) + \delta \dot{q}_i(t), t) - L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)] dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i(t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

En effet, $q_i(t) \mapsto q_i(t) + \delta q_i(t)$ donc $\dot{q}_i(t) \mapsto \dot{q}_i(t) + \frac{d}{dt}(\delta q_i(t))$, ce dont on déduit que $\delta \dot{q}_i(t) = \frac{d}{dt}(\delta q_i(t))$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right) - \delta q_i(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] dt \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i(t) \right) \right] dt. \\ \text{Donc } \delta S &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)(t_2) \delta q_i(t_2) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)(t_1) \delta q_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i(t) \right] dt. \end{aligned}$$

1.2. Application

Pour notre principe variationnel, on a $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

$$\text{Donc } \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i(t) \right] dt.$$

Or au voisinage de la trajectoire physique $\tilde{q}(t)$, on a $\delta S = S[\tilde{q} + \delta q] - S[\tilde{q}] = 0$ au premier ordre en δq .

$$\text{D'où } 0 = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) (\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)) \delta q_i(t) \right] dt.$$

Et ce, pour tout $\delta q_i(t)$ vérifiant $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

$$\text{Pour cela, il faut et il suffit que } \forall t \in [t_1, t_2], \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right] (\tilde{q}(t), \dot{\tilde{q}}(t)) = 0.$$

Cela signifie que $\tilde{q}(t)$ est solution de l'équation d'Euler-Lagrange.

On a donc bien équivalence entre le principe variationnel et les équations d'Euler-Lagrange pour une trajectoire physique.

2. Non unicité du lagrangien

On sait que $L(q, \dot{q}, t)$ et $\bar{L}(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt}$ donnent les mêmes équations d'Euler-Lagrange.

$$\text{Soit } \bar{S}[q] = \int_{t_1}^{t_2} \bar{L}(q, \dot{q}, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{dF(q, t)}{dt} \right] dt.$$

$$\text{Donc } \bar{S}[q] = S[q] + F(q(t_2), t_2) - F(q(t_1), t_1).$$

Or, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, donc la quantité $F(q(t_2), t_2) - F(q(t_1), t_1)$ ne dépend pas de la trajectoire q considérée.

Ceci signifie alors qu'extrémaliser $\bar{S}[q]$ est équivalent à extrémaliser $S[q]$.

Les deux principes variationnels donnent donc la même trajectoire physique, ce qui est cohérent avec le fait que L et \bar{L} donnent les mêmes équations d'Euler-Lagrange.

Au passage, on retrouve aussi pourquoi f ne doit pas dépendre de \dot{q} . En effet, la quantité $F(q(t_2), t_2) - F(q(t_1), t_1)$ serait alors remplacée par $F(q(t_2), \dot{q}(t_2), t_2) - F(q(t_1), \dot{q}(t_1), t_1)$, qui elle dépend de la trajectoire considérée (les vitesses en P_1 et P_2 ne sont pas fixées, contrairement aux positions).

3. Changement de coordonnées

On opère le changement de coordonnées $q_i \mapsto q'_i(q_j, t)$.

L'action est alors, par définition, $S'[q'] = S[q(q')]$

S et S' sont deux fonctionnelles différentes, mais minimiser S' vis-à-vis de $q'(t)$ est équivalent à minimiser S vis-à-vis de $q(t)$.

On a $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$ et $S'[q'] = \int_{t_1}^{t_2} L'(q'(t), \dot{q}'(t), t) dt$.

Or $S'[q'] = S[q]$, d'où $\int_{t_1}^{t_2} [L'(q'(t), \dot{q}'(t), t) - L(q(t), \dot{q}(t), t)] dt = 0$.

Donc $L'(q'(t), \dot{q}'(t), t) = L(q(t), \dot{q}(t), t) + \frac{dF(q, t)}{dt}$.

Et on sait que minimiser S vis-à-vis de q revient à résoudre les équations d'Euler-Lagrange pour $L(q, \dot{q}, t)$.

De même, minimiser S' vis-à-vis de q' revient à résoudre les équations d'Euler-Lagrange pour $L'(q', \dot{q}', t)$.

Donc vu la relation entre $L(q, \dot{q}, t)$ et $L'(q', \dot{q}', t)$, ces deux lagrangiens donnent les mêmes équations d'Euler-Lagrange.

Ceci est cohérent avec le fait que minimiser S' vis-à-vis de $q'(t)$ est équivalent à minimiser S vis-à-vis de $q(t)$.

4. Remarques

- On aurait pu commencer par introduire le principe variationnel, qui apparaît comme encore plus fondamental que le lagrangien ;
- A propos de la mécanique quantique :
lorsque l'on cherche la probabilité de passer de (q_1, t_1) à (q_2, t_2) , on intègre tous les chemins en leur donnant un poids lié à l'action, on a l'intégrale de chemin suivante :

$$P(q_1, t_1 \mapsto q_2, t_2) = \int_{q(t_1)=q_1, q(t_2)=q_2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[q(t)]\right) dq(t).$$

IV - Dérivée fonctionnelle et principe variationnel

1. Dérivée fonctionnelle

On a $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt$.

Notation : on pose $\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)$.

On appelle cette quantité la dérivée fonctionnelle de $S[q]$.

Cela est justifié par le fait qu'on avait, si $\delta q_i(t_2) = \delta q_i(t_1) = 0$,

$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i(t) \right] dt$ et que la dérivée fonctionnelle

de $S[q]$ se caractérise par
$$\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} [\delta q_i(t) \frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)}] dt.$$

Remarque : la dérivée d'une fonctionnelle est une fonction (au sens usuel).

Dans ce cadre, le principe variationnel équivaut à annuler la dérivée fonctionnelle (puisque l'on extrêmise la fonctionnelle) et donc à avoir $\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} = 0$.

2. Méthode variationnelle

Pour un problème variationnel plus général, on procède par analogie avec la mécanique. On va détailler ici un exemple pour illustrer la méthode variationnelle.

2.1. Identifier le problème variationnel

Dans notre exemple, on cherche le plus court chemin entre deux points P_1 et P_2 .

Le problème est donc de minimiser la longueur du chemin.

On se ramène alors à un plan contenant P_1 et P_2 , et on le munit des coordonnées cartésiennes (x, y) . L'élément de longueur dS le long d'un chemin est alors donné par $dS^2 = dx^2 + dy^2$. On note L la longueur d'un chemin de $P_1(x_1, y_1)$ à $P_2(x_2, y_2)$.

$$L = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

2.2. Identifier la fonctionnelle

Le chemin est paramétré par une fonction $y(x)$.

La fonctionnelle est alors $L[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$.

2.3. Analogie avec la mécanique

Mécanique	S	t	q	\dot{q}	L
Problème considéré	L	x	y	$\frac{dy}{dx}$	F

Ici, on a bien sûr $F(y, \dot{y}, x) = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \dot{y}^2}$.

2.4. Ecrire les équations d'Euler-Lagrange correspondantes

Ici, cela donne $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$.

2.5. Résoudre

On a ici $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = \frac{2\dot{y}}{2\sqrt{1+\dot{y}^2}} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}$.

Donc $\frac{d}{dx}(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(\frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{1+\dot{y}^2}} = cste$.

Cela implique que $\frac{\partial y}{\partial x} = \dot{y} = cste$, et donc que $y = ax + b$.

On retrouve donc bien que le plus court chemin de P_1 à P_2 est un morceau de droite.

V - Principe variationnel et contraintes

1. Origine du problème

On considère ici à nouveau des contraintes holonomes $f_n(q_i, t) = 0$.

On a vu que $\delta S = S[q + \delta q] - S[q] = \int_{t_1}^{t_2} [\delta q_i(t) \frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)}] dt$.

Or, à cause des contraintes holonomes, les $\delta q_i(t)$ ne sont pas indépendantes.

En effet, il faut préserver $f_n(q_i, t) = 0$, ce qui impose $\frac{\partial f_n}{\partial q_i} \delta q_i(t) = 0$.

En clair, du fait que les $\delta q_i(t)$ ne sont plus indépendantes, on a toujours que S stationnaire entraîne $\delta S[q] = 0$, mais $\delta S[q] = 0$ n'entraîne plus $\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} = 0$.

2. Motivation et analogie

2.1. Motivation

Il s'agit d'un problème d'analyse, qui consiste à extrêmiser $s(\vec{x})$ tout en respectant la contrainte $f(\vec{x}) = 0$

Cette contrainte peut par exemple être $f(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ (cela correspondrait à une particule contrainte à se déplacer sur une sphère de rayon R).

La résolution consiste alors à se ramener au cas simple de l'extrémisation d'une fonction d'une seule variable réelle.

Notons \vec{X}_0 la solution, c'est-à-dire que $s(\vec{X}_0)$ est extrême et $f(\vec{X}_0) = 0$.

Avec $f(\vec{x}) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, on a $M_0(\vec{X}_0)$ sur la sphère de rayon R .

Soit alors un chemin $c : t \in \mathbb{R} \mapsto \vec{c}(t)$: une courbe quelconque tracée sur la sphère et telle que $\vec{c}(0) = \vec{X}_0$.

Soit alors $h : \left\{ \begin{array}{cc} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto s(\vec{c}(t)) \end{array} \right\}$, h est extrême en $t = 0$, donc $h'(t) = 0$.

Or $h = s \circ \vec{c}$, donc $h'(t) = \vec{\nabla} s(\vec{c}(t)) \cdot \frac{d\vec{c}}{dt}(t)$.

Donc ici, toute courbe $\vec{c}(t)$ vérifie $0 = h'(0) = \vec{\nabla} s(\vec{X}_0) \cdot \frac{d\vec{c}}{dt}(0)$.

Donc toutes les courbes vérifiant $\vec{c}(0) = \vec{X}_0$ sont telles que $\frac{d\vec{c}}{dt}(0)$ soit orthogonal à $\vec{\nabla}_s(\vec{X}_0)$. Or, pour les courbes vérifiant $\vec{c}(0) = \vec{X}_0$, les $\frac{d\vec{c}}{dt}(0)$ décrivent le plan tangent à la sphère de rayon R en $M_0(\vec{X}_0)$.

Donc $\vec{\nabla}_s(\vec{X}_0)$ est normal à la sphère de rayon R , et donc il est colinéaire au vecteur normal à la sphère en $M_0(\vec{X}_0)$, qui n'est autre que $\vec{\nabla}f(\vec{X}_0)$.

La solution \vec{X}_0 est alors caractérisée par $\boxed{\vec{\nabla}_s(\vec{X}_0) = \lambda \vec{\nabla}f(\vec{X}_0)}$.

2.2. Analogie

Par analogie avec le traitement des contraintes holonomes, on va ici s'intéresser à des contraintes globales. Par exemple, on peut étudier le problème de la minimisation d'une aire à périmètre constant.

La contrainte globale est alors représentée par une fonctionnelle $F[q] = 0$.

2.2.i) Contrainte globale

Problème du 2.1	$s(\vec{X})$	$f(\vec{X})$	$\vec{\nabla}_s$	$\vec{\nabla}_f$
Contrainte globale	$S[q]$	$F[q]$	$\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)}$	$\frac{\delta F[q]}{\delta q_i(t)}$

On va donc chercher ici à extrémaliser $S[q]$ avec la contrainte globale $F[q] = 0$. Dans la mesure où on était arrivé à $\vec{\nabla}_s(\vec{X}_0) = \lambda \vec{\nabla}f(\vec{X}_0)$ pour le problème considéré au 2.1, on est ici ramené à poser $\boxed{\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} = \lambda \frac{\delta F[q]}{\delta q_i(t)}}$.

2.2.ii) Contraintes holonomes $f_n(q_i, t) = 0$

Problème du 2.1	$s(\vec{X})$	$f(\vec{X})$	$\vec{\nabla}_s$	$\vec{\nabla}_f$
Contrainte holonome	$S[q]$	$f_n(q_i, t)$	$\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)}$	$\frac{\partial f_n}{\partial q_i}$

De la même manière que précédemment, si on souhaite extrémaliser $S[q]$ en respectant

$f_n(q_i, t) = 0$, on arrive à l'équation $\boxed{\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} = \lambda_n(t) \frac{\partial f_n}{\partial q_i}}$.

On retrouve d'ailleurs ici l'équation $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \lambda_n(t) \frac{\partial f_n}{\partial q_i}$, qui avait été vue dans le cadre de la formulation lagrangienne (avec λ de signe opposé, ce qui ne change rien au traitement du problème).

3. Autre manière

On part de $f_n(q_i, t) = 0$. On cherche q telle que $\delta S[q] = \int \frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} \delta q_i(t) dt = 0$.

Or $f_n(q_i, t) = 0$ nous conduit à poser $\frac{\delta S[q]}{\delta q_i(t)} = \lambda_n(t) \frac{\partial f_n}{\partial q_i}$.

Donc on a $\delta S[q] = \int \lambda_n(t) \frac{\partial f_n}{\partial q_i} \delta q_i(t) dt = 0$.

Or $\lambda_n(t)$ est non nulle et on obtient alors $\frac{\partial f_n}{\partial q_i} \delta q_i(t) = 0$.

4. Exemple

On pose $f(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0$ (mouvement sur un cercle de rayon R).

Alors pour préserver la contrainte, il faut $\delta f = 2x\delta x + 2y\delta y = 0$.

Et vu que $\vec{\nabla} f = (2x, 2y)$ et $\delta \vec{x} = (\delta x, \delta y)$, on a $\delta \vec{x} \cdot \vec{\nabla} f = 0$.

De $x\delta x + y\delta y = 0$, on tire alors $\delta y = -\frac{x}{y}\delta x$.

Donc $0 = \delta S = \int \left[\frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta x(t) + \frac{\delta S}{\delta y(t)} \delta y(t) \right] dt = \int \left[\frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta x(t) - \frac{x}{y} \frac{\delta S}{\delta y(t)} \delta x(t) \right] dt$.

D'où $0 = \delta S = \int \left[\frac{\delta S}{\delta x(t)} - \frac{x}{y} \frac{\delta S}{\delta y(t)} \right] \delta x(t) dt$.

Or, δx est quelconque et on a donc $0 = \frac{\delta S}{\delta x(t)} - \frac{x}{y} \frac{\delta S}{\delta y(t)}$, soit $\frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{x}{y} \frac{\delta S}{\delta y(t)}$.

Donc $\frac{1}{x} \frac{\delta S}{\delta x(t)} = \frac{1}{y} \frac{\delta S}{\delta y(t)} = 2\lambda(t)$ On pose $\lambda(t)$ comme ceci pour avoir :

$\frac{\delta S}{\delta x(t)} = 2\lambda(t)x(t) = \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\delta S}{\delta y(t)} = 2\lambda(t)y(t) = \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial y}$.

On retrouve bien alors les équations vues plus haut.

4 Symétries et lois de conservation

Le plan de ce chapitre sera le suivant :

- Motivations ;
- Groupes continus de transformations ;
- Symétries.

I - Motivations

1. Energie et quantité de mouvement

On sait que pour un système isolé, il y a conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Il est par ailleurs toujours intéressant d'avoir (ou d'identifier) des quantités conservées.

L'origine de l'existence de telles lois de conservation n'est pas forcément claire.

2. Constatations

Il va s'agir ici de comparer les cas de la particule libre et de l'oscillateur harmonique à une dimension (on pose pour toute la suite $m = 1$ et $k = 1$).

2.1. Les aventures de Goldstein et Landau

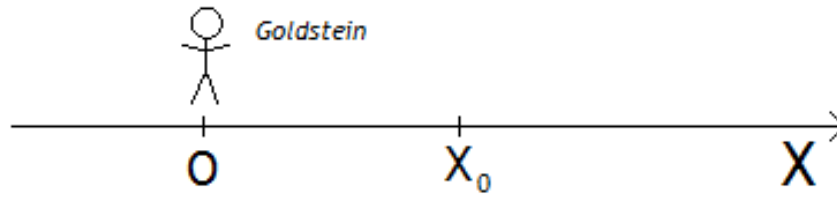
2.1.i) Choix du matériel

Le physicien réalise (entre autres) des mesures de temps et de distances, pour cela il utilise une règle et une horloge, mais aussi un carnet de notes pour consigner ses résultats.

Les expériences de Goldstein et Landau vont ici consister en la détermination (pour la particule libre et l'oscillateur harmonique) de la position comme fonction du temps et des conditions initiales $(M_0, \dot{M}_0, t) \mapsto M(M_0, \dot{M}_0, t)$.

2.1.ii) Première journée : étude de la particule libre

Le matin du premier jour, Goldstein étudie seul la particule libre, pour cela il choisit une origine sur son axe.



Il trouve $X(t, X_0, \dot{X}_0) = X_0 + t\dot{X}_0$.

La fonction position est donc $(M_0, \dot{M}_0, t) \mapsto M_0 + t\dot{M}_0$.

Le soir du premier jour, c'est au tour de Landau d'étudier seul la particule libre, pour cela il choisit aussi une origine sur son axe.



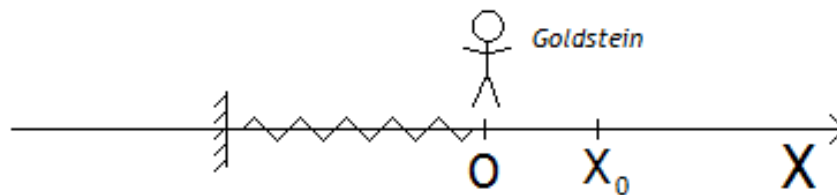
Il trouve $X'(t, X'_0, \dot{X}'_0) = X'_0 + t\dot{X}'_0$.

La fonction position est donc $(M_0, \dot{M}_0, t) \mapsto M_0 + t\dot{M}_0$.

Tout va bien, tous les deux arrivent à la même fonction.

2.1.iii) Seconde journée : étude de l'oscillateur harmonique

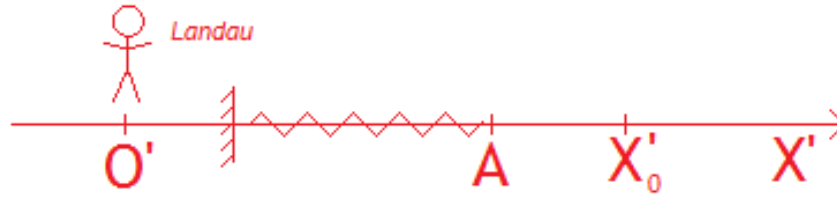
Le matin du second jour, Goldstein étudie seul l'oscillateur harmonique, avec une vitesse initiale nulle. Il place l'origine de son axe sur la position à l'équilibre de l'oscillateur.



Il trouve $X(t, X_0) = X_0 \cos t$.

La fonction position est donc $(M_0, t) \mapsto M_0 \cos t$.

Le soir venu, c'est de nouveau au tour de Landau de venir au laboratoire, pour lui aussi étudier seul l'oscillateur harmonique avec vitesse initiale nulle. Il place lui son origine en un point O' distinct de la position d'équilibre A , tel que $a = O'A = 3\text{cm}$.



Il trouve $X'(t, X'_0) - a = (X'_0 - a) \cos t$.

La fonction position est donc $(M_0, t) \mapsto a + (M_0 - a) \cos t$.

Il y a un problème, ils ne trouvent pas la même fonction.

2.1.iv) Comparaison des carnets de notes

Goldstein et Landau comparent alors leurs mesures de la position en fonction du temps, pour une même condition initiale.

Les mesures de Goldstein sont les suivantes :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	...
$X(t)$ en cm	1	0	-1	...

Et les mesures de Landau sont les suivantes :

t	0	$\frac{\pi}{2}$	π	...
$X'(t)$ en cm	4	3	2	...

Nos deux personnages se rendent alors compte qu'ils ont en fait bien affaire au même comportement de l'oscillateur harmonique, seulement la différence de leurs choix d'origine fait que $X' = X + a$.

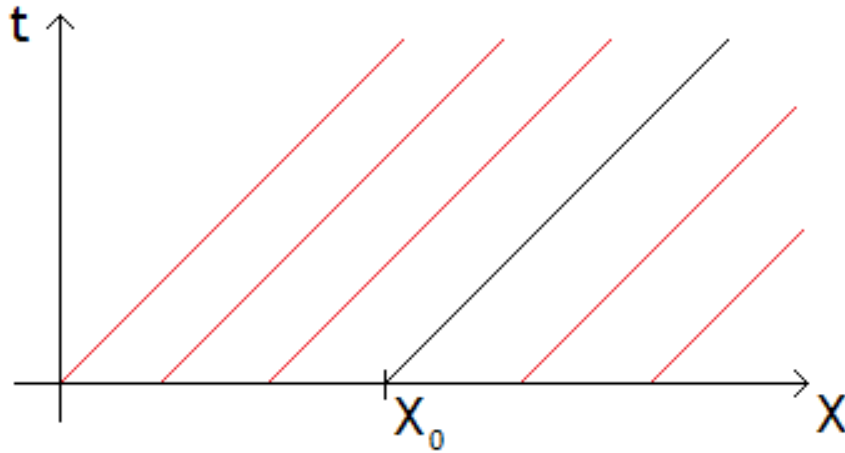
Cela soulève un nouveau problème : pourquoi cette différence dans le choix de l'origine de l'axe ne modifiait pas la fonction dans le cas de la particule libre, mais la modifie dans le cas de l'oscillateur harmonique ?

2.1.v) Comparaison théorique des deux systèmes étudiés

Système étudié	Particule libre	Oscillateur harmonique
Equation du mouvement	$\ddot{X} = 0$	$\ddot{X} = -X$
Quantité de mouvement	$p = \dot{X}, \frac{dp}{dt} = 0$ p conservée	$p = \dot{X}, \frac{dp}{dt} = \ddot{X} \neq 0$ p non conservée
Energie totale	$E = \frac{1}{2}\dot{X}^2, \frac{dE}{dt} = 0$ E conservée	$E = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}X^2$ $\frac{dE}{dt} = \dot{X}\ddot{X} + \dot{X}X = \dot{X}(\ddot{X} + X) = 0$ E conservée
Lagrangien	$L(X, \dot{X}) = \frac{1}{2}\dot{X}^2$ $L : (X, \dot{X}) \mapsto \frac{1}{2}\dot{X}^2$	$L(X, \dot{X}) = \frac{1}{2}\dot{X}^2 - \frac{1}{2}X^2$ $L : (X, \dot{X}) \mapsto \frac{1}{2}\dot{X}^2 - \frac{1}{2}X^2$
Translation spatiale	$Y = X + a, t' = t$ $L'(Y, \dot{Y}) = L(Y - a, \dot{X}, t)$ $L'(Y, \dot{Y}) = \frac{1}{2}\dot{Y}^2$ $L' : (Y, \dot{Y}) \mapsto \frac{1}{2}\dot{Y}^2$ $L' = L$	$Y = X + a, t' = t$ $L'(Y, \dot{Y}) = L(Y - a, \dot{X}, t)$ $L(Y, \dot{Y}) = \frac{1}{2}\dot{Y}^2 - \frac{1}{2}(Y - a)^2$ $L' : (Y, \dot{Y}) \mapsto \frac{1}{2}\dot{Y}^2 - \frac{1}{2}(Y - a)^2$ $L' \neq L$
Eq. d'Euler-Lagrange	$\ddot{Y} = 0$ Même équation	$\ddot{Y} + (Y - a) = 0$ Equation différente
Translation temporelle	$X' = X, t' = t + \alpha, dt' = dt$ $L'(X, \frac{dX}{dt'}, t') = L(X, \frac{dX}{dt}, t)$ $L'(X, \frac{dX}{dt}, t') = \frac{1}{2}(\frac{dX}{dt})^2$ $L' : (X, \frac{dX}{dt}, t') \mapsto \frac{1}{2}(\frac{dX}{dt})^2$ $L' = L$	$X' = X, t' = t + \alpha, dt' = dt$ $L'(X, \frac{dX}{dt}, t') = L(X, \frac{dX}{dt}, t)$ $L'(X, \frac{dX}{dt}, t') = \frac{1}{2}(\frac{dX}{dt})^2 - \frac{1}{2}X^2$ $L' : (X, \frac{dX}{dt}, t') \mapsto \frac{1}{2}(\frac{dX}{dt})^2 - \frac{1}{2}X^2$ $L' = L$
Eq. d'Euler-Lagrange	$\frac{d^2X}{dt^2} = 0$ Même équation	$\frac{d^2X}{dt^2} = -X$ Même équation

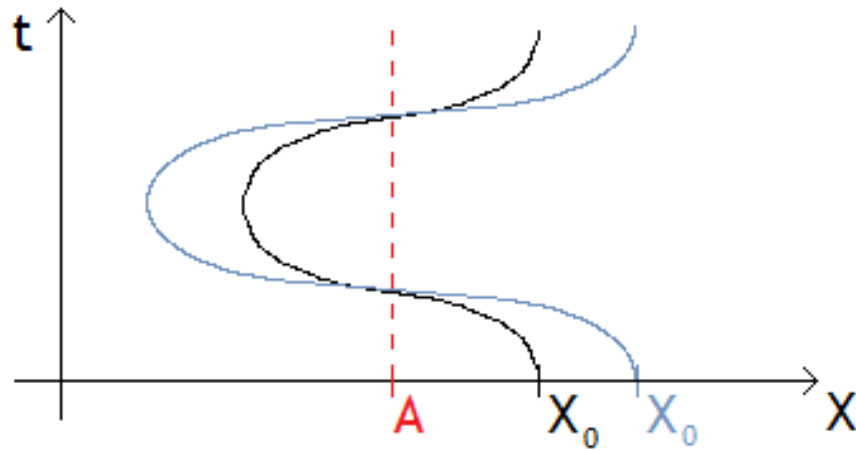
Il apparaît donc que l'invariance par **translation temporelle** est corrélée à la **conservation de l'énergie**, et que l'invariance par **translation spatiale** est corrélée à la **conservation de la quantité de mouvement**.

2.1.vi) Lignes d'univers



Lignes d'univers pour la particule libre

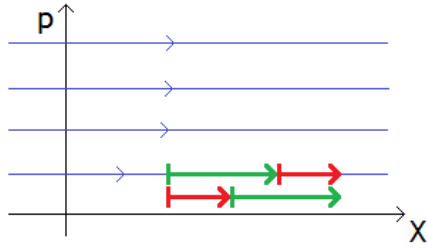
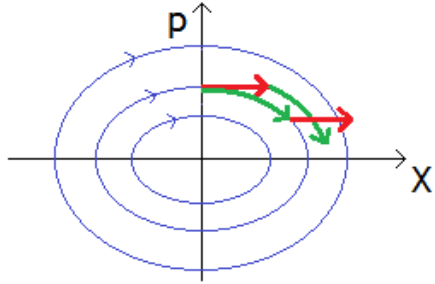
Pour la particule libre, $X = X_0 + \dot{X}_0 t$. Les lignes rouges correspondent à d'autres valeurs de X_0 (et donc à des changements de repère) et s'obtiennent par simple translation de la ligne d'univers tracée en noir.



Lignes d'univers pour l'oscillateur harmonique

Pour l'oscillateur harmonique, $AX = AX_0 \cos t$. La ligne bleue correspond à une seconde valeur de X_0 mais ne s'obtient pas par simple translation de la ligne d'univers tracée en noir.

2.1.vii) « Commutation » entre évolution dans le temps et translation spatiale

Système étudié	Particule libre	Oscillateur harmonique
Expression de X	$X(t) = X_0 + \dot{X}_0 t$	$X(t) = X_0 \cos(\omega t)$
Expression de p	$p(t) = \dot{X} = \dot{X}_0$	$p(t) = \dot{X}(t) = -\omega X_0 \sin(\omega t)$
Portrait de phase		

Dans les portraits de phase, on a représenté **en vert l'évolution dans le temps** et **en rouge la translation spatiale**. On voit alors clairement que ces deux opérations **commutent** dans le cas de la **particule libre**, mais **ne commutent pas** dans le cas de l'**oscillateur harmonique**.

2.2. But et plan pour la suite

La suite du chapitre est consacrée à l'étude du comportement des systèmes sous des transformations continues :

- Apprendre la structure de ces transformations continues ;
- Faire la différence entre les propriétés intrinsèques de ces transformations et la manière dont elles sont réalisées en mécanique classique (et quantique) ;
- Définir les symétries par rapport aux transformations continues ;
- Énoncer et démontrer le théorème de Noether.

II - Groupes continus de transformations

1. Définition

Avant toutes choses, il faut savoir que cette notion est fondamentale en physique. On parlera de groupes de Lie (ou d'algèbres de Lie), et on pourra consulter à leur sujet (entre autres) Lie algebras de Jacobsen.

Définition :

On dit que G est un groupe de Lie de dimension n si :

- 1) G est un groupe ;
- 2) $\forall g \in G, \exists(\alpha_1, \dots, \alpha_n), g = T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$;
- 3) $\forall g, g' \in G, g = T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $g' = T(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n)$.

Cela implique en particulier que $gg' \in G$, $gg' = T(\beta_1, \dots, \beta_n)$ avec $\beta_i(\alpha_j, \alpha'_j)$ et que $g^{-1} \in G$, $g^{-1} = T(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ avec $\gamma_i(\alpha_j)$. Ici, $\beta_i(\alpha_j, \alpha'_j)$ et $\gamma_i(\alpha_j)$ sont des fonctions analytiques.

2. Exemples

Exemple 1 : les translations spatiales, avec $n = 3$.

Exemple 2 : les rotations autour d'un axe fixé, avec $n = 1$.

Soit Δ un axe fixé, et soit $\alpha \in [0, 2\pi[$.

On note $T(\alpha)$ la rotation d'angle α autour de l'axe Δ .

On a alors $T(\alpha) \circ T(\beta) = T(\alpha + \beta)$, $T^{-1}(\alpha) = T(-\alpha)$ et $T(0) = I_d$.

Remarque : dans les exemples 1 et 2, les groupes sont abéliens (i.e. commutatifs).

Exemple 3 : les rotations autour d'un axe quelconque, avec $n = 3$.

Ce groupe-ci n'est pas abélien (cf. TD).

3. Générateurs

L'idée est que l'information est quasiment contenue par les transformations infinitésimales (c'est-à-dire au voisinage de l'identité).

On a $g = g(a_1, \dots, a_n)$ et $I_d = g(0, \dots, 0)$.

Une **transformation infinitésimale** est telle que $\boxed{g(\varepsilon_i) \simeq I_d + \varepsilon_i \mathcal{S}_i}$.

Les \mathcal{S}_i sont les **générateurs du groupe** (la dimension d'un groupe est égale au nombre de ses générateurs).

Exemple 1 : Translations spatiales, $n = 3$. Les générateurs sont les trois translations unitaires selon x , y et z .

Exemple 2 : Rotations autour d'un axe fixé. Un générateur est la rotation d'angle 1 autour de cet axe.

Les générateurs forment une algèbre de Lie :

$\boxed{[\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] = \mathcal{S}_i \mathcal{S}_j - \mathcal{S}_j \mathcal{S}_i = C_{ijk} \mathcal{S}_k}$, où les C_{ijk} sont les **constantes de structure** du groupe.

En particulier, si le groupe est abélien, les constantes de structure sont nulles.

Dans la suite, on va surtout s'intéresser aux translations spatiales, temporelles, et aux rotations.

On va maintenant définir une **transformation générale infinitésimale**.

Les paramètres en sont les $\varepsilon_\mu (\mu = 0, \dots, N)$, et en particulier, ε_0 est le paramètre de translation temporelle.

$$\left\{ \begin{array}{l} q'_i(t') = q_i(t) + \delta q_i(t) \\ t' = t + \delta t \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} \delta q_i(t) = \varepsilon_\mu A_{i\mu}(q_i(t), t) \\ \delta t = \varepsilon_\mu B_\mu \\ A_{i0} = 0 \text{ et } B_\mu = -\delta_{\mu,0} \end{array} \right\}$$

A noter que dans l'équation $B_\mu = -\delta_{\mu,0}$, δ est le symbole de Kronecker.

Exemple :

Pour une translation spatiale infinitésimale, on a $\delta X = \varepsilon_1$ et $\delta t = 0$.

Cela implique que $\varepsilon_0 = 0$ et $A_{11} = 1$.

III - Symétries

1. Définition

On considère Σ un système mécanique et $G : (q_i(t), t) \mapsto (q'_i(t'), t')$.

G est un **groupe continu de symétries** pour Σ
(ou Σ est invariant par G)
si les **équations du mouvement** de Σ explicitées en termes des $(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, t)$ sont **invariantes** sous G .

Cela signifie que ce seront les mêmes en termes des $(q'_i(t'), \dot{q}'_i(t'), \ddot{q}'_i(t'), t')$.

Autrement dit, si la solution est $q_i(t) = f_i(q_j(t_0), \dot{q}_j(t_0), t_0, t)$, alors on aura également $q'_i(t) = f_i(q'_j(t'_0), \dot{q}'_j(t'_0), t'_0, t')$, avec la même fonction f_i .

2. Condition suffisante pour symétrie

Une condition suffisante pour que Σ soit invariant par G est :

$$L'(q' \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{dF(q', t')}{dt'}$$

On retrouve d'ailleurs ici la différence entre covariance et invariance, qui était déjà apparue dans le tableau comparatif entre la particule libre et l'oscillateur harmonique.

Equation d'Euler-Lagrange pour q_i : $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$.

Equation d'Euler-Lagrange pour q'_i : $\frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q'_i} = 0$.

Or si $L'(q' \dot{q}', t') = L(q', \dot{q}', t') + \frac{dF(q', t')}{dt'}$, on a : $\frac{d}{dt'} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}'_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q'_i} = 0$.

Premier exemple : particule soumise à une force constante :

On a alors $L(X, \dot{X}) = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + gX$.

On effectue la transformation suivante : $Y = X - a$ et $t' = t + \alpha$, qui donne aussi $\dot{Y} = \dot{X}$ et $dt' = dt$.

Par covariance, on a $L'(Y, \dot{Y}) = L(X, \dot{X}) = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + gX = \frac{1}{2}\dot{Y}^2 + g(Y + a)$.

Donc $L'(Y, \dot{Y}) = L(Y, \dot{Y}) + ga = L(Y, \dot{Y}) + \frac{d}{dt}(gat)$. Et $gat = F(Y, t)$.

Le critère suffisant pour symétrie est donc satisfait, ce qui signifie que le système constitué par une particule soumise à une force constante est invariant pour les translations spatiales et temporelles.

Second exemple :

On se place en coordonnées cartésiennes et on pose $q_1 = x$ et $q_2 = y$.

On considère une rotation d'angle $\theta = \varepsilon \ll 1$ autour de l'axe (Oz) .

On a alors la relation $\begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$.

Or $\sin \theta \simeq \theta = \varepsilon$ et $\cos \theta \simeq 1$, d'où $q'_1 = q_1 + \varepsilon q_2$ et $q'_2 = q_2 - \varepsilon q_1$.

Il n'y a pas de translation temporelle, donc un seul paramètre $\varepsilon_1 = \varepsilon$.

Et on a alors $\delta q_1 = \varepsilon_1 q_2$ et $\delta q_2 = -\varepsilon_1 q_1$, d'où $A_{11}(q_1, q_2) = q_2$ et $A_{21}(q_1, q_2) = -q_1$.

3. Théorème de Noether

3.1. Enoncé

Théorème de Noether : si un système est invariant par un groupe continu de dimension n , alors il existe n quantités physiques qui sont des constantes du mouvement.

Ce théorème est du à Emmy Noether, mathématicienne, qui l'a démontré en 1918.

3.2. Démonstration

Critère suffisant pour symétrie au niveau infinitésimal :

$$L'(q', \dot{q}', t') - L(q', \dot{q}', t') = \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q', t')}{dt'}.$$

$$\text{Soit, par covariance : } L(q, \dot{q}, t) - L(q', \dot{q}', t') = \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q', t')}{dt'}.$$

$$\text{Soit, au premier ordre : } L(q, \dot{q}, t) - L(q', \dot{q}', t') = \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$\text{Posons alors } a = L(q', \dot{q}', t') - L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt} \text{ (donc } a = 0 \text{ en fait).}$$

$$\text{Alors } a = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$\text{Or } \delta\left(\frac{dq_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\delta q_i), \text{ d'où } \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}(\delta q_i).$$

$$\text{Alors } a = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}(\delta q_i) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$a = \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$a = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right) \delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$\text{Or } \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i, \text{ d'où } \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i.$$

$$\text{Et pour une solution des équations du mouvement, } \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0.$$

$$\text{Alors } a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) + \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i\right) \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) + \left(\frac{dL}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \dot{q}_i\right) \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) + \left(\frac{dL}{dt} + \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \dot{q}_i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right)\right) \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$\text{De nouveau, pour une solution des équations du mouvement, } \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0.$$

$$\text{Alors } a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i\right) + \left(\frac{dL}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i\right)\right) \delta t + \varepsilon_\mu \frac{dF_\mu(q, t)}{dt}.$$

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) \delta t + \varepsilon_\mu F_\mu(q, t)\right).$$

$$\text{Or } \delta q_i = \varepsilon_\mu A_{i\mu}(q), \delta t = \varepsilon_\mu B_\mu \text{ et } a = 0.$$

$$\text{Donc } 0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \varepsilon_\mu A_{i\mu}(q)\right) + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) \varepsilon_\mu B_\mu + \varepsilon_\mu F_\mu(q, t).$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i\mu}(q)\right) + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) B_\mu + F_\mu(q, t).$$

$$\text{On a donc bien } \boxed{\frac{dQ_\mu}{dt} = 0} \text{ avec } \boxed{Q_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i\mu}(q) + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) B_\mu + F_\mu(q, t)}.$$

4. Exemples

4.1. Translation spatiale

On considère un système Σ formé de deux particules, à une dimension, les deux particules interagissant par un potentiel $V(|q_1 - q_2|)$.

Translation infinitésimale : $q'_1 = q_1 + \varepsilon$ et $q'_2 = q_2 + \varepsilon$.

$$L'(q', \dot{q}', t') = L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2 - V(|q_1 - q_2|).$$

$$\text{Et } L(q', \dot{q}', t') = \frac{1}{2}m_1\dot{q}'_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}'_2^2 - V(|q'_1 - q'_2|).$$

Or ici $\dot{q}'_1 = \dot{q}_1$, $\dot{q}'_2 = \dot{q}_2$ et $q'_1 - q'_2 = q_1 - q_2$. Donc $L(q', \dot{q}', t') = L(q, \dot{q}, t)$.

On va donc pouvoir appliquer le théorème de Noether, sachant qu'ici

$$\delta q_1 = \delta q_2 = \varepsilon = \varepsilon_1, A_{11} = 1, A_{21} = 1 \text{ et } F_1 = 0.$$

$$\text{Alors } Q_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i1}(q) + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) B_1 + F_1(q, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i1}(q)$$

$$Q_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} A_{11}(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} A_{21}(q) = m_1\dot{q}_1 + m_2\dot{q}_2 \text{ et on a } \frac{dQ_1}{dt} = 0.$$

C'est donc ici la quantité de mouvement totale qui est conservée.

Observons maintenant le cas d'une particule à une dimension, soumise à une force extérieure constante. On a alors $L'(q', \dot{q}') = L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + Gq$.

$$L(q', \dot{q}', t') = \frac{1}{2}m\dot{q}'^2 + Gq' = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + Gq + G\varepsilon = L(q, \dot{q}) + G\varepsilon.$$

$$\text{Donc } L(q, \dot{q}) - L(q', \dot{q}') = -G\varepsilon = \varepsilon \frac{d}{dt}(-Gt).$$

On va donc pouvoir appliquer le théorème de Noether, sachant qu'ici

$$\delta q_1 = \varepsilon = \varepsilon_1, A_{11} = 1 \text{ et } F_1 = -Gt.$$

$$\text{Alors } Q_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i1}(q) + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) B_1 + F_1(q, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i1}(q) + F_1(q, t)$$

$$Q_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} A_{11}(q) + F_1(q, t) = m\dot{q}_1 - Gt \text{ et on a } \frac{dQ_1}{dt} = 0.$$

Donc finalement on retrouve bien $\boxed{m\ddot{q}_1 = G}$.

4.2. Variables cycliques

Cf. TD.

4.3. Translation temporelle

4.3.i) Critère d'invariance

On a $q'_i = q_i$ et $t' = t - \varepsilon$.

$$\text{Donc } L(q, \dot{q}, t) - L(q', \dot{q}', t') = L(q, \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t - \varepsilon) \simeq \varepsilon \frac{\partial L}{\partial t}.$$

On a donc invariance par translation temporelle si $\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dF(q_i, t)}{dt}}$.

En fait, on peut toujours se ramener au cas où $F = 0$.

En effet, on peut poser $\bar{L} = L + \frac{dX(q_i, t)}{dt}$ sans changer les équations du mouvement.

Et alors $\frac{\partial \bar{L}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dX(q_i, t)}{dt} \right) = \frac{dF(q_i, t)}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial X(q_i, t)}{\partial t} \right)$.

En effet, on peut intervertir les dérivations totale et partielle vis-à-vis de t car X ne dépend que de t et des q_i .

Alors en prenant X tel que $\frac{\partial X(q_i, t)}{\partial t} = -F(q_i, t)$, on a $\frac{\partial \bar{L}}{\partial t} = 0$.

Dans toute la suite, on suppose que l'on s'est ramené à ce cas-là.

4.3.ii) Quantité conservée correspondante

On a $\varepsilon = \varepsilon_0$, $F_0 = 0$, $B_0 = -1$ et $A_{i0} = 0$, ce qui nous donne :

$$\frac{dQ_0}{dt} = 0 \text{ et } Q_0 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i0}(q) + (L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i) B_0 + F_0(q, t) = -(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i)$$

La quantité conservée est donc $\boxed{H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L}$.

4.3.iii) Applications

On considère un ensemble de particules avec un potentiel $V(q_i)$.

On a donc $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ et ainsi, $L = T - V$ vérifie $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Alors $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + V$ est conservée.

Or ici $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$ et T est homogène de degré 2, donc $\dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$.

La quantité conservée est donc $H = 2T - T + V = T + V$.

C'est donc ici l'énergie totale qui est conservée.

Considérons maintenant un ensemble de particules chargées dans un champ électromagnétique externe et indépendant du temps.

On choisit alors ϕ et \vec{A} indépendants du temps.

Le potentiel généralisé s'écrit donc $V = e\phi(q_i) - e\dot{q}_i A_i(q_j)$.

On a au passage $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ et ainsi, $L = T - V$ vérifie $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

Donc on a $H = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + V$ qui est conservée.

$H = 2T - T - \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + V$ où $V_1 = e\phi(q_i)$ et $V_2 = -e\dot{q}_i A_i(q_j)$.

On remarque que $\frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = 0$ et $\frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = V_2$.

D'où $H = T - V_2 + V = T - V_2 + V_1 + V_2 = T + V_1$.

La quantité conservée est donc ici $\boxed{H = T + V_1 = T + e\phi(q_i)}$.

Remarques :

- Ce résultat est cohérent avec ce que l'on sait, c'est-à-dire que le terme en $q \vec{v} \wedge \vec{B}$ de la force de Lorentz ne travaille pas ;
- Dans les deux cas étudiés, la quantité conservée est l'énergie totale.

5 Formulation Hamiltonienne

I - Motivations

- Essentielle pour la mécanique quantique ;
- Essentielle pour la mécanique statistique (espace des phases, théorème de Liouville) ;
- En formulation lagrangienne, on a covariance sous les changements de coordonnées $q_i \mapsto q'_i(q_j, t)$ mais q_i et \dot{q}_i ne jouent pas le même rôle.
Mais, en formulation hamiltonienne, les variables essentielles sont les q_i et les p_i , et les transformations mélangeront à la fois les q_i et les p_i ;
- Symétries : d'une part, donner un sens à la commutation entre évolution temporelle et transformation continue, et d'autre part, établir les propriétés illustrant les caractéristiques du groupe des transformations (donner un sens à la notion de générateur des transformations).

II - Définition de la formulation hamiltonienne

1. Moment conjugué et hamiltonien

1.1. Remarques

1.1.i) Système invariant par translation temporelle

Cela signifie que l'on a $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$.

$$\text{Alors } \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \dot{q}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right).$$

$$\text{Donc } \frac{dL}{dt} = \dot{q}_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \neq 0.$$

Mais du coup, on a $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L \right) = 0$.

La quantité intéressante dans le cas d'un système invariant par translation temporelle va donc être $\boxed{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L}$.

1.1.ii) Transformée de Legendre

Une telle expression correspond à une transformée de Legendre. C'est par exemple ce qu'on fait en thermodynamique pour passer de $S(U, V, N)$ à $U(S, V, N)$.

Pour remplacer S par T , on pose $F(T, V, N) = U - TS = U - (\frac{\partial U}{\partial S})_{V, N} S$.

1.2. Moment conjugué

On opère ici une transformation de Legendre vis-à-vis des \dot{q}_i .

On définit le **moment conjugué de q_i** par $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.

On se limitera ici aux cas où la relation $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$ est inversible en $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j, t)$. Lorsque ce n'est pas le cas, il existe une procédure due à Dirac.

Les variables de la formulation hamiltonienne sont les q_i et les p_i , qui seront considérées comme indépendantes (à l'instar des q_i et des \dot{q}_i en formulation lagrangienne).

1.3. Hamiltonien

On définit le hamiltonien par $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L$.

On a donc $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i(q_j, p_j, t) - L(q_j, \dot{q}_j(q_k, p_k, t), t)$, ce qui signifie que les variables sont bien les (p_i, q_i, t) .

1.4. Exemples

Exemple 1 :

On considère une particule de masse m soumise à un potentiel $V(X_i)$.

Le lagrangien de ce système s'écrit $L(X_i, \dot{X}_i) = \frac{1}{2} m \dot{X}_i^2 - V(X_i)$.

On calcule alors $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = m \dot{X}_i$

Alors $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L = (m \dot{X}_i) \dot{X}_i - \frac{1}{2} m \dot{X}_i^2 + V(X_i) = \frac{1}{2} m \dot{X}_i^2 + V(X_i)$.

Or $\dot{X}_i = \frac{p_i}{m}$, donc $H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m} + V(X_i)$.

Exemple 2 :

On considère une particule chargée (m, e) dans un champ électromagnétique.

Le lagrangien de ce système s'écrit $L(X_i, \dot{X}_i) = \frac{1}{2} m \dot{X}_i^2 - e\phi(X_i, t) + e\dot{X}_i A_i(X_i, t)$.

On calcule alors $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}_i} = m \dot{X}_i + e A_i(X_i, t)$

D'où $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i - L = (m\dot{X}_i + eA_i(X_j, t))\dot{X}_i - \frac{1}{2}m\dot{X}_i^2 + e\phi(X_i, t) - eA_i(X_j, t)\dot{X}_i$.

Donc $H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2}m\dot{X}_i^2 + e\phi(X_i, t)$.

Or $\dot{X}_i = \frac{p_i}{m}$, donc $H(q_i, p_i, t) = \frac{1}{2} \frac{p_i^2}{m} + e\phi(X_i, t)$.

Remarque :

Ici, les p_i ne correspondent pas aux coordonnées du vecteur quantité de mouvement. En effet, $p_i = m\dot{X}_i + eA_i(X_j, t) \neq m\dot{X}_i$.

En particulier, $\frac{\partial \dot{X}_i(X_j, p_j, t)}{\partial X_j} \neq 0$, donc les formulations hamiltonienne et lagrangienne diffèrent sur ce point, ce qui est cohérent avec le fait qu'en formulation hamiltonienne, les variables indépendantes sont les q_i et les p_i , et non pas les q_i et les \dot{q}_i comme en formulation lagrangienne.

2. Equations de Hamilton

On peut les obtenir de plusieurs manières différentes.

2.1. A partir des équations d'Euler-Lagrange

On a $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i(q_j, p_j, t) - L(q_j, \dot{q}_j(q_k, p_k, t), t)$.

Donc $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}$. Or $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

On en déduit immédiatement que $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$.

De plus, $\frac{\partial H}{\partial q_i} = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}$. Or $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$.

Donc $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}$. Or on a que $\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0$ et $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$.

On en déduit immédiatement que $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt}$.

Conclusion : on a les **équations de Hamilton** $\boxed{\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}}$ et $\boxed{\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt}}$.

2.2. A partir du principe de moindre action

On a l'action $S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$ et $H = p_i \dot{q}_i - L$.

Donc $S[q_i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [p_i \dot{q}_i - H] dt$.

Donc
$$S[q_i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \{p_i dq_i - H dt\}.$$

Appliquons le principe variationnel pour S , par rapport aux $q_i(t)$ et $p_i(t)$.

On considère $\delta q_i(t)$ et $\delta p_i(t)$ avec bien sûr $\delta q_i(t_1) = \delta q_i(t_2) = 0$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{\delta p_i dq_i + p_i \delta(dq_i) - (\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i) dt\}.$$

Or on remarque que $p_i \delta(dq_i) = p_i d(\delta q_i) = d(p_i \delta q_i) - \delta q_i dp_i$.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \{\delta p_i dq_i + d(p_i \delta q_i) - \delta q_i dp_i - (\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i) dt\} \\ &= p_i(t_2) \delta q_i(t_2) - p_i(t_1) \delta q_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \{\delta p_i dq_i - \delta q_i dp_i - (\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i) dt\} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \{\delta p_i (dq_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} dt) + \delta q_i (-dp_i - \frac{\partial H}{\partial q_i} dt)\}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 0 = \delta S = \int_{t_1}^{t_2} \{[\delta p_i (\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i}) + \delta q_i (-\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i})] dt\}.$$

Et ce, pour toutes fonctions $\delta p_i(t)$ et $\delta q_i(t)$, donc les facteurs $\frac{dq_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_i}$ et $-\frac{dp_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_i}$

doivent être nuls, ce qui nous donne $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}$ et $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt}$.

2.3. Espace des phases

Formulation	Lagrangienne	Hamiltonienne
Variables indépendantes	(q_i, \dot{q}_i, t) $L(q_i, \dot{q}_i, t)$	(q_i, p_i, t) $H(q_i, p_i, t) = p_i \dot{q}_i(q_j, p_j, t) - L(q_i, \dot{q}_i(q_j, p_j, t), t)$
Equations du mvt.	$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$	$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ et $\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
N particules	$3N$ équ. d'ordre 2	$6N$ équ. d'ordre 1

On a une forme de similarité entre les variables indépendantes q_i et p_i qu'on n'a pas en formulation lagrangienne entre les q_i et les \dot{q}_i .

Espace de configuration q_i = **Espace à $3N$ dimensions.**

Espace des phases (q_i, p_i) = **Espace à $6N$ dimensions.**

L'état d'un système hamiltonien au temps t correspond à un point dans l'espace des phases (donnée des $3N$ positions q_i et des $3N$ moments conjugués p_i).

Les conditions initiales :

- En formulation lagrangienne, elles consistent en la donnée des $q_i(t_0)$ donc d'un point de l'espace de configuration (dimension $3N$), ainsi que de leurs dérivées à l'instant initial, les $\dot{q}_i(t_0)$;
- En formulation hamiltonienne, elles consistent en la donnée des $(q_i(t_0), p_i(t_0))$ donc d'un point de l'espace des phases (dimension $6N$). Par ailleurs, deux trajectoires différentes ne peuvent se couper en ce point.

2.4. Exemples

Exemple 1 :

On considère un oscillateur harmonique, $L(X_i, \dot{X}_i) = \frac{1}{2}m\dot{X}_i^2 - V(X_i)$.

On trouve alors aisément $H(X, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kX^2$.

On a $\frac{dX}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}$. Or ici, $\frac{p}{m} = \dot{X}$, donc on retrouve en fait $\dot{X} = \dot{X}$.

Mais on a aussi $\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial X} = -kX$. Or ici, $p = m\dot{X}$, donc on a $\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$.

Par ailleurs, vu que l'énergie totale est constante, on a $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kX^2 = cste$.

Donc les trajectoires de l'oscillateur harmonique dans l'espace des phases (courbes (X, p)) sont des ellipses.

Exemple 2 :

Particule soumise à un potentiel central à symétrie sphérique.

On a alors, $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\varphi})^2) - V(r)$.

Alors $p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$, $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ et $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2(\sin\theta)^2\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned} H &= p_i\dot{q}_i - L = p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + p_\varphi\dot{\varphi} - L = m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2(\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 - L \\ &= m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2 + mr^2(\sin\theta)^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\varphi})^2) + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\sin\theta\dot{\varphi})^2) + V(r) = \frac{1}{2}m\left(\frac{p_r^2}{m^2} + \frac{p_\theta^2}{m^2r^2} + \frac{p_\varphi^2}{m^2r^2(\sin\theta)^2}\right) + V(r). \end{aligned}$$

$$\text{D'où, finalement, } \boxed{H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2(\sin\theta)^2}\right) + V(r).}$$

3. Crochets de Poisson

3.1. Motivations

On a vu plus haut qu'en formulation hamiltonienne, les q_i et les p_i jouent des rôles presque semblables.

Considérons une grandeur $A(q_i, p_i, t)$.

On a alors $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \dot{p}_i$. Or $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ et $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Donc $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$.

C'est cette dernière quantité $\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$ qui amène à la définition du crochet de Poisson.

3.2. Définition

On note m l'espace des phases (q_i, p_i) .

En mécanique classique, les observables sont des fonctions $A(q_i, p_i, t)$.

Du point de vue des mathématiques, on a alors $A \in C^\infty(m \times \mathbb{R})$.

On définit alors le **crochet de Poisson** :

$$\{, \} : \left\{ \begin{array}{ccc} C^\infty(m \times \mathbb{R}) \times C^\infty(m \times \mathbb{R}) & \rightarrow & C^\infty(m \times \mathbb{R}) \\ (f, g) & \mapsto & \{f, g\} \end{array} \right\}.$$

dont la formule explicite est :

$$\boxed{\boxed{\{f, g\}(p_i, q_i, t) = \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i}}}.$$

Propriétés du crochet de Poisson :

i) Antisymétrie : $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (avec au passage $\{f, f\} = 0$).

ii) Linéarité : $\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g\} = \lambda_1 \{f_1, g\} + \lambda_2 \{f_2, g\}$.

iii) Formule de Leibniz : $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$.

iv) Identité de Jacobi : $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$.

A noter que l'identité de Jacobi est aussi satisfaite par le commutateur de deux matrices, qui fonctionne de manière analogue au crochet de Poisson et a une grande importance en mécanique quantique.

3.3. Variables canoniquement conjuguées

On dit que q_i et son moment conjugué p_i sont des **variables canoniques**.

Cela se caractérise en particulier par :

i) $\forall i, j, \{q_i, q_j\} = \frac{\partial q_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial q_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} = 0$ (car q et p indépendants) ;

- ii) $\forall i, j, \{p_i, p_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial p_j}{\partial p_k} = 0$ (car q et p indépendants) ;
- iii) $\forall i, j, \{p_i, q_j\} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} - \frac{\partial p_i}{\partial q_k} \frac{\partial q_j}{\partial p_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} \frac{\partial q_j}{\partial q_k} = \delta_{i,k} \delta_{j,k} = \delta_{i,j}$.

Un jeu de variables q_i et p_i **canoniques** est donc caractérisé par :

$$\boxed{\{q_i, q_j\} = 0, \{p_i, p_j\} = 0 \text{ et } \{p_i, q_j\} = \delta_{i,j}}$$

3.4. Réécriture des équations de Hamilton et quantités conservées

Pour $A(q_i, p_i, t)$, on avait vu que $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i}$.

Donc en fait, $\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}}$.

Donc si A est une quantité conservée, on a $\frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\} = 0$.

Et même, avoir A quantité conservée ne dépendant pas explicitement de t équivaut à avoir $\{H, A\} = 0$.

Théorème de Poisson :

Si A et B sont deux quantités conservées ne dépendant pas explicitement du temps (autrement dit, si on a $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} = 0$),

alors $\{A, B\}$ est aussi conservé.

Ce théorème se prouve à l'aide de l'identité de Jacobi.

Mais la plupart du temps, $\{A, B\}$ n'est pas une quantité indépendante de A et B .

4. Résumé

Description d'un système mécanique en formulation hamiltonienne :

- Espace des phases m : l'état du système à un instant t correspond à un point de m ;
- Variables canoniques q_i et p_i ;
- Observables : fonctions sur l'espace des phases M et le temps. Ils commutent entre eux, c'est-à-dire que $(AB)(q_i, p_i, t) = A(q_i, p_i, t)B(q_i, p_i, t) = (BA)(q_i, p_i, t)$;
- Importance du crochet de Poisson $\{, \}$;
- Equation d'évolution d'une observable A : $\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\}$.

5. Remarques

5.1. Calcul des crochets de Poisson

On peut bien sûr utiliser la définition pour calculer un crochet de Poisson.

Mais on peut faire mieux : utiliser les propriétés du crochet de Poisson (formule de Leibniz et identité de Jacobi, en particulier) et les crochets canoniques $\{q_i, q_j\} = 0$, $\{p_i, p_j\} = 0$ et $\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j}$.

Exemple :

Particule de masse m en chute libre. $H = \frac{p^2}{2m} + mgq$.

$$\begin{aligned} \text{On a } \{H, q\} &= \left\{ \frac{p^2}{2m} + mgq, q \right\} = \frac{1}{2m} \{p^2, q\} + mg\{q, q\} = \frac{1}{2m} \{p^2, q\} \\ &= \frac{1}{2m} p\{p, q\} + \frac{1}{2m} p\{p, q\} = \frac{p}{m} \{p, q\} = \frac{p}{m}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mieux, } \{H, \{H, q\}\} &= \left\{ \frac{p^2}{2m} + mgq, \frac{p}{m} \right\} = \frac{1}{2m^2} \{p^2, p\} + g\{q, p\} = \frac{1}{2m^2} \{p^2, p\} - g \\ &= \frac{1}{2m^2} p\{p, p\} + \frac{1}{2m^2} p\{p, p\} - g = \frac{p}{m^2} \{p, p\} - g = -g. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } \{H, p\} &= \left\{ \frac{p^2}{2m} + mgq, p \right\} = \frac{1}{2m} \{p^2, p\} + mg\{q, p\} = \frac{1}{2m} \{p^2, p\} - mg \\ &= \frac{1}{2m} p\{p, p\} + \frac{1}{2m} p\{p, p\} - mg = \frac{p}{m} \{p, p\} - mg = -mg. \end{aligned}$$

$$\text{Mieux, } \{H, \{H, p\}\} = \left\{ \frac{p^2}{2m} + mgq, -mg \right\} = 0.$$

5.2. Application

Si $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, alors on a vu que $\frac{dA}{dt} = \{H, A\}$.

Si, de plus, $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, alors on peut résoudre par une équation intégrale :

$$A(q_i, p_i, t) = A(q_i, p_i, 0) + \int_0^t \{H, A\}(q_i, p_i, t') dt'.$$

Mais on peut alors appliquer le même procédé à $\{H, A\}$.

$$\text{Alors } A(q_i, p_i, t) = A(q_i, p_i, 0) + \int_0^t [\{H, A\}(q_i, p_i, 0) + \int_0^{t'} \{H, \{H, A\}\}(q_i, p_i, t'') dt''] dt'.$$

$$\text{Soit } A(q_i, p_i, t) = A(q_i, p_i, 0) + t\{H, A\}(q_i, p_i, 0) + \int_0^t \left[\int_0^{t'} \{H, \{H, A\}\}(q_i, p_i, t'') dt'' \right] dt'.$$

Si on itère ainsi le processus, on a finalement :

$$A(q_i, p_i, t) = A(q_i, p_i, 0) + t\{H, A\}(q_i, p_i, 0) + \frac{t^2}{2} \{H, \{H, A\}\}(q_i, p_i, 0) + \dots$$

On peut l'écrire directement comme ceci : $A(q_i, p_i, t) = \exp(t\{H, \cdot\})A(q_i, p_i, 0)$.

On remarque que cette écriture est analogue à celle de l'opérateur d'évolution en mécanique quantique.

Revenons à la chute libre étudiée juste avant. On avait $\{H, q\} = \frac{p}{m}$, $\{H, \{H, q\}\} = -g$, et donc $\{H, \{H, \{H, q\}\}\} = 0$, ainsi que $\{H, p\} = -mg$ et $\{H, \{H, p\}\} = 0$.

Donc si on considère $A = q$, on a $q(t) = q(0) + t\frac{p(0)}{m} - g\frac{t^2}{2}$.

Et si on considère $A = p$, on a $p(t) = p(0) - mgt$.

On retrouve donc bien les résultats connus sur la chute libre.

III - Transformations canoniques

1. Motivations

On a vu en formulation lagrangienne l'importance des changements de coordonnées $q_i \mapsto q'_i = q'_i(q_j, t)$.

On cherche alors l'analogue en formulation hamiltonienne, sachant que le changement se fera à la fois en q_i et en p_i , et que la structure présente sur l'espace des phases m est le crochet de Poisson.

2. Définition et propriétés

2.1. Définition

On considère une transformation T indépendante du temps :

$$T : (q_i, p_i) \mapsto (q'_i = q'_i(q_j, p_j), p'_i = p'_i(q_j, p_j)).$$

T est une transformation canonique si
 $\{q'_i, q'_j\} = 0$, $\{p'_i, p'_j\} = 0$ et $\{p'_i, q'_j\} = \delta_{i,j}$.

Nota bene : les crochets de Poisson sont bien sûr en termes des p_k et q_k de départ, c'est-à-dire que $\{q'_i, q'_j\} = \frac{\partial q'_i}{\partial p_k} \frac{\partial q'_j}{\partial q_k} - \frac{\partial q'_i}{\partial q_k} \frac{\partial q'_j}{\partial p_k}$.

Exemple :

On considère la transformation définie par $p'_i = -q_i$ et $q'_i = p_i$.

C'est une transformation canonique (cela se montre assez facilement).

Maintenant, pour une transformation $T : (q_i, p_i) \mapsto (q'_i = q'_i(q_j, p_j), p'_i = p'_i(q_j, p_j))$, on a, pour deux observables f et g , les relations $f(q_i, p_i, t) = f'(q'_i, p'_i, t)$ et $g(q_i, p_i, t) = g'(q'_i, p'_i, t)$. On définit alors $\{, \}'$ par $\{f', g'\}' = \frac{\partial f'}{\partial p'_k} \frac{\partial g'}{\partial q'_k} - \frac{\partial f'}{\partial q'_k} \frac{\partial g'}{\partial p'_k}$.

On a alors la caractérisation suivante :

$$T \text{ est une transformation canonique}$$

$$\Downarrow$$

$$\{f', g'\}(q'_i, p'_i, t) = \{f, g\}(q_i, p_i, t).$$

Démonstration :

Le sens \Downarrow :

Il suffit de le montrer pour les observables q_i et p_i , ce qui se fait aisément.

Le sens \Uparrow :

Soient $f(q_k, p_k) = p'_i(q_k, p_k)$ et $g(q_k, p_k) = q'_j(q_k, p_k)$.

Alors $\{f', g'\}' = \{p'_i, q'_j\}'$, et par hypothèse $\{f', g'\}' = \{f', g'\} = \{p'_i, q'_j\}(p_k, q_k)$.

Donc en identifiant, on a $\{p'_i, q'_j\}(p_k, q_k) = \{p'_i, q'_j\}'(p'_k, q'_k)$.

Et on a clairement $\{q'_i, q'_j\}' = 0$, $\{p'_i, p'_j\}' = 0$ et $\{p'_i, q'_j\}' = \delta_{i,j}$.

Donc la transformation est canonique.

2.2. Exemple

Revenons à la transformation définie par $p'_i = -q_i$ et $q'_i = p_i$.

On pose $f(q, p) = q^2$ et $g(q, p) = p$.

Alors $\{f, g\} = \{q^2, p\} = 2q\{q, p\} = -2q$.

On a par ailleurs $f'(q', p') = q^2 = (-p')^2 = p'^2$ et $g'(p', q') = p = q'$.

Alors $\{f', g'\}' = \{p'^2, q'\}' = 2p'\{p', q'\} = 2p' = -2q$.

On a bien $\{f, g\} = \{f', g'\}'$.

2.3. Covariance des équations de Hamilton sous transformation canonique

On a $H(q_i, p_i, t)$. On définit $H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i(q'_j, p'_j), p_i(q'_j, p'_j), t)$.

On a alors $\frac{dp'_i}{dt} = \frac{d}{dt}p'_i(p_j, q_j) = \{H, p'_i\}(q_j, p_j)$.

Or la transformation est canonique et on a donc $\{H, p'_i\}(q_j, p_j) = \{H', p'_i\}(q'_j, p'_j)$.

Donc on a $\frac{dp'_i}{dt} = \{H', p'_i\}(q'_j, p'_j)$, sachant qu'on avait $\frac{dp_i}{dt} = \{H, p_i\}(q_j, p_j)$.

Résumé :

Pour une transformation canonique T ne dépendant pas du temps, on a

$$H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i(q'_j, p'_j), p_i(q'_j, p'_j), t).$$

Et pour une observable $A(q_i, p_i, t) = A'(q'_i, p'_i, t)$, l'équation d'évolution

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{H, A\} \text{ devient } \frac{dA'}{dt} = \frac{\partial A'}{\partial t} + \{H', A'\}'.$$

2.4. Remarques

Remarque 1 :

L'ensemble des transformations canoniques forme un groupe.

Remarque 2 :

Revenons à l'oscillateur harmonique, $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2$.

On effectue la transformation canonique (on y reviendra) implicitement définie par :

$$p = f(p') \cos q' \text{ et } q = \frac{1}{m\omega_0} f(p') \sin q'.$$

$$H'(p', q') = H(p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 q^2 = \frac{1}{2m} f(p')^2 (\cos q')^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2 \frac{1}{m^2\omega_0^2} f(p')^2 (\sin q')^2$$

$$\text{Donc } H'(p', q') = \frac{1}{2m} f(p')^2 (\cos q')^2 + \frac{1}{2m} f(p')^2 (\sin q')^2 = \frac{1}{2m} f(p')^2.$$

$$\text{On a } \frac{dp'}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'} = 0 \text{ et } \frac{dq'}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'} = \frac{1}{m} f(p') \frac{df}{dp'} = \alpha \text{ indépendant de } t.$$

$$\text{Donc } q'(t) = q(0) + \alpha t = q_0 + \alpha t \text{ et } p'(t) = p'(0) = p'_0.$$

Cherchons maintenant f telle que la transformation soit bien canonique.

$$\{p, q\}'(p', q') = \frac{\partial p}{\partial p'} \frac{\partial q}{\partial q'} - \frac{\partial p}{\partial q'} \frac{\partial q}{\partial p'} = \frac{df}{dp'} \cos q' \frac{1}{m\omega_0} f(p') \cos q' + f(p') \sin q' \frac{1}{m\omega_0} \frac{df}{dp'} \sin q'$$

$$\{p, q\}'(p', q') = \frac{df}{dp'} (\cos q')^2 \frac{1}{m\omega_0} f(p') + f(p') (\sin q')^2 \frac{1}{m\omega_0} \frac{df}{dp'} = \frac{1}{m\omega_0} f(p') \frac{df}{dp'}.$$

$$\text{Or on veut } \{p, q\}'(p', q') = \{p, q\}(p, q) = 1.$$

$$\text{Il faut donc que } f(p') \frac{df}{dp'} = m\omega_0, \text{ d'où } \frac{1}{2} f(p')^2 = m\omega_0 p' + A.$$

$$\text{On prend } A = 0, \text{ et on a alors } f(p') = \sqrt{2m\omega_0 p'} = \sqrt{2m\omega_0 p'_0} \text{ car } p' = p'_0.$$

$$\text{Alors } \boxed{p(t) = \sqrt{2m\omega_0 p'_0} \cos(q_0 + \alpha t)} \text{ et } \boxed{q(t) = \sqrt{\frac{2p'_0}{m\omega_0}} \sin(q_0 + \alpha t)}.$$

3. Fonctions génératrices

3.1. Motivations

Pour le moment, nous procédons comme suit pour construire une transformation canonique : nous imaginons une transformation, puis vérifions si elle est canonique, et si elle ne l'est pas, nous imaginons une autre transformation, et ainsi de suite.

A l'aide des fonctions génératrices, nous allons être en mesure de construire des transformations qui seront automatiquement canoniques.

Le langage adapté sera celui des formes différentielles (cf. Arnold) et on admettra que les fonctions génératrices donnent des transformations canoniques (cf. Landau).

3.2. Construction

On a que l'action s'écrit $S[q_i, p_i] = \int_{t_1}^{t_2} \{p_i dq_i - H dt\}$.

On considère une transformation canonique, dans le cas le plus général où elle dépendrait aussi du temps : $(q_i, p_i, t) \mapsto (q'_i(q_i, p_i, t), p'_i(q_i, p_i, t), t)$.

Alors on réécrit l'action $S'[q'_i, p'_i] = \int_{t_1}^{t_2} \{p'_i dq'_i - H' dt\}$.

Si la transformation est canonique, on sait que l'on a covariance générale sous cette transformation pour tout hamiltonien H , c'est-à-dire que les équations de Hamilton en termes des (q_i, p_i, H) seront équivalentes à celles en termes des (q'_i, p'_i, H') .

Mais pour que cela soit vrai pour tout hamiltonien H , il faut que $S[q_i, p_i]$ et $S'[q'_i, p'_i]$ soient extrémales « ensemble ».

Cela signifie que l'on a $\forall H, p_i dq_i - H dt = p'_i dq'_i - H' dt + dF$ (dF est une différentielle totale éventuellement présente).

En effet, cela donne $S[q_i, p_i] = S'[q'_i, p'_i] + F(t_2) - F(t_1)$ et donc les deux fonctionnelles seront extrémales en même temps.

On pose donc $\boxed{dF = p_i dq_i - p'_i dq'_i - (H - H') dt}$.

On peut montrer (mais comme dit plus haut, on l'admettra ici) que cette condition définit bien une transformation canonique.

Il s'agit maintenant de choisir de bonnes variables pour F .

On choisit $\boxed{F = F(q_i, q'_i, t)}$. Alors $dF = \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial F}{\partial q'_i} dq'_i + \frac{\partial F}{\partial t} dt$.

Or $dF = p_i dq_i - p'_i dq'_i - (H - H') dt$.

En identifiant, on a $\boxed{\frac{\partial F}{\partial q_i} = p_i}$, $\boxed{\frac{\partial F}{\partial q'_i} = -p'_i}$ et $\boxed{\frac{\partial F}{\partial t} = -(H - H')}$.

3.3. Remarques

On constate un terme nouveau dans l'expression $H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$, qui provient du fait que la transformation canonique dépend ici du temps.

On a un problème avec l'identité, qui est évidemment une transformation canonique. On a $p = \frac{\partial F}{\partial q}$ et $p = p' = -\frac{\partial F}{\partial q'} = -\frac{\partial F}{\partial q} = -p$, donc $p = 0$, ce qui ne convient pas.

Enfin, on constate que $F(q_i, q'_i) = q_i q'_i$ donne $p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} = q'_i$ et $p'_i = -\frac{\partial F}{\partial q'_i} = -q_i$, ce qui revient à changer (q_i, p_i) en $(p_i, -q_i)$.

3.4. Autre type de fonctions génératrices

Notre problème pour l'identité vient du choix de q_i et q'_i comme variables indépendantes, car pour l'identité, $q_i = q'_i$.

Posons alors $\phi = F + p'_i q'_i$, soit $F = \phi - q'_i p'_i$.

Alors $dF = d\phi - p'_i dq'_i - q'_i dp'_i$ et $dF = p_i dq_i - p'_i dq'_i - (H - H')dt$.

Donc $d\phi - p'_i dq'_i - q'_i dp'_i = p_i dq_i - p'_i dq'_i - (H - H')dt$.

D'où $d\phi = q'_i dp'_i + p_i dq_i - (H - H')dt$.

Cela nous suggère alors $\phi(q_i, p'_i, t)$ où $\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial q_i} = p_i}$, $\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial p'_i} = q'_i}$ et $\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} = -(H - H')}$.

Pour résoudre notre problème avec l'identité, on pose $\phi(q_i, p'_i) = p'_i q_i$.

Or $\phi = F + p'_i q'_i = F - \frac{\partial F}{\partial q'_i} q'_i$. On a en fait remplacé q'_i par p'_i , c'est une transformée de Legendre.

3.5. Résumé et remarques

On introduit la fonction génératrice $\boxed{F(q_i, p'_i, t)}$. On a alors les équations :

$$\boxed{p_i = \frac{\partial F(q_j, p'_j, t)}{\partial q_i}}, \quad \boxed{q'_i = \frac{\partial F(q_j, p'_j, t)}{\partial p'_i}} \quad \text{et} \quad \boxed{H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F(q_j, p'_j, t)}{\partial t}}.$$

La fonction $F(q_i, p'_i) = p'_i q_i$ correspond alors à l'identité.

Par ailleurs, si on écrit $q'_i = f_i(q_j, t)$ (transformation ponctuelle en formulation lagrangienne), cette transformation sera donnée par $F(q_i, p'_i) = p'_i f_i(q_j, t)$.

Les transformations ponctuelles de la formulation lagrangienne sont donc incluses dans les transformations canoniques.

4. Symétries en formulation hamiltonienne

4.1. Transformation canonique infinitésimale

On génère les transformations canoniques infinitésimales avec des fonctions de la forme $F(p'_i, q_i, t) = p'_i q_i - \varepsilon_n G_n(p'_j, q_j, t)$ (somme de la fonction génératrice de l'identité et d'un changement infinitésimal).

$$\text{Alors } p_i = \frac{\partial F(q_j, p'_j, t)}{\partial q_i} = p'_i - \varepsilon_n \frac{\partial G_n(q_j, p'_j, t)}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad q'_i = \frac{\partial F(q_j, p'_j, t)}{\partial p'_i} = q_i - \varepsilon_n \frac{\partial G_n(q_j, p'_j, t)}{\partial p'_i}.$$

$$\text{Au premier ordre en } \varepsilon_n, \quad p_i = p'_i - \varepsilon_n \frac{\partial G_n(q_j, p'_j, t)}{\partial q_i} \simeq p'_i - \varepsilon_n \frac{\partial G_n(q_j, p_j, t)}{\partial q_i}$$

$$\text{et } q'_i = q_i - \varepsilon_n \frac{\partial G_n(q_j, p'_j, t)}{\partial p'_i} \simeq q_i - \varepsilon_n \frac{\partial G_n(q_j, p_j, t)}{\partial p_i}.$$

$$\text{Or } \{G_n, p_i\} = \frac{\partial G_n}{\partial p_j} \frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial G_n}{\partial q_j} \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = -\frac{\partial G_n}{\partial q_j} \delta_{i,j} = -\frac{\partial G_n}{\partial q_i}.$$

$$\text{Donc } \delta p_i = p'_i - p_i = \varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial q_i} = -\varepsilon_n \{G_n, p_i\}.$$

De même, $\{G_n, q_i\} = \frac{\partial G_n}{\partial p_j} \frac{\partial q_i}{\partial q_j} - \frac{\partial G_n}{\partial q_j} \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = \frac{\partial G_n}{\partial p_j} \delta_{i,j} = \frac{\partial G_n}{\partial p_i}$.

Donc $\delta q_i = q'_i - q_i = -\varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial p_i} = -\varepsilon_n \{G_n, q_i\}$.

On a donc $\boxed{\delta p_i = -\varepsilon_n \{G_n, p_i\}}$ et $\boxed{\delta q_i = -\varepsilon_n \{G_n, q_i\}}$.

Par ailleurs, $H'(q'_i, p'_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F(q_j, p'_j, t)}{\partial t} = H(q_i, p_i, t) - \varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial t}$.

D'une manière générale, la variation d'une observable A quelconque s'écrit :

$$\delta A = A(q'_i, p'_i, t) - A(q_i, p_i, t) = \frac{\partial A}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial A}{\partial p_i} \delta p_i.$$

Or on avait $\delta q_i = -\varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial p_i}$ et $\delta p_i = \varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial q_i}$.

Donc en fait $\delta A = -\varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial p_i} \frac{\partial A}{\partial q_i} + \frac{\partial A}{\partial p_i} \varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial q_i}$, d'où $\boxed{\delta A = -\varepsilon_n \{G_n, A\}}$.

4.2. Définition

Par analogie avec la formulation lagrangienne, on définit les symétries en formulation hamiltonienne par :

Un système mécanique est invariant par un groupe continu de transformations $(q_i, p_i) \mapsto (q'_i, p'_i)$ si les équations de Hamilton en termes des (q_i, p_i) sont invariantes.

4.3. Critères suffisants

Un critère suffisant pour avoir une symétrie est $\boxed{H'(p'_i, q'_i, t) = H(p_i, q_i, t)}$.

Au niveau infinitésimal, on fait $F(q_i, p'_i, t) = p'_i q_i - \varepsilon_n G_n$.

Or $H'(p'_i, q'_i, t) = H(q_i, p_i, t) - \varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial t}$.

Or si on a le critère suffisant de symétrie, $H'(p'_i, q'_i, t) = H(p'_i, q'_i, t)$.

Donc $H(p'_i, q'_i, t) - H(q_i, p_i, t) = -\varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial t}$, soit $\delta H = -\varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial t}$.

Or pour une observable A , $\delta A = -\varepsilon_n \{G_n, A\}$, donc $\delta H = -\varepsilon_n \{G_n, H\}$.

Donc $-\varepsilon_n \{G_n, H\} = -\varepsilon_n \frac{\partial G_n}{\partial t}$, d'où $\{G_n, H\} = \frac{\partial G_n}{\partial t}$.

Un critère suffisant pour symétrie est donc $\boxed{\forall n, \{G_n, H\} = \frac{\partial G_n}{\partial t}}$.

4.4. Conséquence

On a l'équation d'évolution de l'observable $G_n : \frac{dG_n}{dt} = \frac{\partial G_n}{\partial t} + \{H, G_n\}$.

Donc $\frac{dG_n}{dt} = \frac{\partial G_n}{\partial t} - \{G_n, H\}$. Or si on a $\{G_n, H\} = \frac{\partial G_n}{\partial t}$, alors $\frac{dG_n}{dt} = 0$.

Donc si on a symétrie par rapport au groupe engendré par G_n , alors $\boxed{\frac{dG_n}{dt} = 0}$.

On obtient ici un résultat analogue au théorème de Noether.

On peut préciser que si G_n ne dépend pas explicitement du temps, alors $\frac{\partial G_n}{\partial t} = 0$, et donc si le système est invariant par G_n , on a $\{H, G_n\} = 0$.

Réciproquement, si $G_n(q_i, p_i)$ est telle que $\{H, G_n\} = 0$, alors on a invariance par les transformations engendrées par G_n , et $\delta A = -\varepsilon_n \{G_n, A\}$.

4.5. Remarques et exemples

Lien avec la formulation lagrangienne : il y a des subtilités, liées à la non unicité du lagrangien.

Le théorème de Noether (hors translation temporelle) donne la conservation des quantités $Q_\mu = -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} A_{i\mu}(q_j) - F_n(q_j, t)$.

Ici, on a les générateurs $G_n(q_i, p_i, t) = Q_n(q_i, \dot{q}_i(q_j, p_j), t)$.

Or $G_n(q_i, p_i, t) = -p_i A_{in}(q_j) - F_n(q_j, t)$, d'où $\delta q_i = -\varepsilon_n \{G_n, q_i\} = \varepsilon_n \{p_j A_{jn} + F_n, q_i\}$.

Donc $\delta q_i = \varepsilon_n \{p_j A_{jn}, q_i\} + \varepsilon_n \{F_n, q_i\} = \varepsilon_n A_{jn} \{p_j, q_i\}$ (car les A_{jn} , F_n et q_i sont indépendants des p_k).

Or $\{p_j, q_i\} = \delta_{ij}$, donc $\delta q_i = \varepsilon_n A_{jn} \delta_{ij} = \varepsilon_n A_{in}$.

On retrouve ici la définition des A_{in} en formulation lagrangienne.

Exemples :

Considérons deux particules, interagissant *via* un potentiel $V(|X_1 - X_2|)$.

Le lagrangien s'écrit $L(X, \dot{X}, t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{X}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{X}_2^2 - V(|X_1 - X_2|)$.

Pour le hamiltonien, on a $L(X, p, t) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(|X_1 - X_2|)$.

On considère une translation spatiale $X_1 \mapsto X_1 + \varepsilon$, $X_2 \mapsto X_2 + \varepsilon$.

En formulation lagrangienne, celle-ci nous donne la conservation de $m_1 \dot{X}_1 + m_2 \dot{X}_2$.

Ce qui veut dire qu'en formulation hamiltonienne, $p_1 + p_2$ est conservé.

$$\{H, p_1 + p_2\} = \{H, p_1\} + \{H, p_2\} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_1}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial p_1}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial p_2}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial p_2}{\partial p_j}.$$

$$\text{D'où } \{H, p_1 + p_2\} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial p_1}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial p_2}{\partial p_j} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} - \frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\partial V(|X_1 - X_2|)}{\partial X_1} - \frac{\partial V(|X_1 - X_2|)}{\partial X_2}.$$

$$\text{Donc } \{H, p_1 + p_2\} = -\frac{\partial V(|X_1 - X_2|)}{\partial X_1} + \frac{\partial V(|X_1 - X_2|)}{\partial X_1} = 0.$$

$$\text{De plus, } -\varepsilon \{p_1 + p_2, q_1\} = -\varepsilon \{p_1, q_1\} - \varepsilon \{p_2, q_1\} = -\varepsilon \left(\frac{\partial p_1}{\partial p_j} \frac{\partial q_1}{\partial q_j} - \frac{\partial p_1}{\partial q_j} \frac{\partial q_1}{\partial p_j} + \frac{\partial p_2}{\partial p_j} \frac{\partial q_1}{\partial q_j} - \frac{\partial p_2}{\partial q_j} \frac{\partial q_1}{\partial p_j} \right).$$

$$\text{Soit } -\varepsilon\{p_1 + p_2, q_1\} = -\varepsilon\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_j} \frac{\partial q_1}{\partial q_j} + \frac{\partial p_2}{\partial p_j} \frac{\partial q_1}{\partial q_j}\right) = -\varepsilon\left(\frac{\partial q_1}{\partial q_1} + \frac{\partial q_1}{\partial q_2}\right) = -\varepsilon.$$

$$\text{Enfin, } -\varepsilon\{p_1 + p_2, q_2\} = -\varepsilon\{p_1, q_2\} - \varepsilon\{p_2, q_2\} = -\varepsilon\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_j} \frac{\partial q_2}{\partial q_j} - \frac{\partial p_1}{\partial q_j} \frac{\partial q_2}{\partial p_j} + \frac{\partial p_2}{\partial p_j} \frac{\partial q_2}{\partial q_j} - \frac{\partial p_2}{\partial q_j} \frac{\partial q_2}{\partial p_j}\right).$$

$$\text{Soit } -\varepsilon\{p_1 + p_2, q_1\} = -\varepsilon\left(\frac{\partial p_1}{\partial p_j} \frac{\partial q_2}{\partial q_j} + \frac{\partial p_2}{\partial p_j} \frac{\partial q_2}{\partial q_j}\right) = -\varepsilon\left(\frac{\partial q_2}{\partial q_1} + \frac{\partial q_2}{\partial q_2}\right) = -\varepsilon.$$

Donc $p_1 + p_2$ engendre les translations spatiales.

4.6. Représentation du groupe des transformations dans l'espace des phases

4.6.i) Résultats généraux

Rappel : en formulation lagrangienne, on a les générateurs \mathcal{S}_i de groupes continus de transformations tels que $g(\varepsilon_i) = I_d + \varepsilon_i \mathcal{S}_i$.

En particulier, on a $[\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] = C_{ijk} \mathcal{S}_k$.

On peut représenter l'action de ce groupe sur l'espace des phases, $\delta f = -\varepsilon_n \{G_n, f\}$.

Par exemple, $G_n = p_i A_{in}(q_k)$. On définit l'opérateur V_n par $V_n \cdot f = -\{G_n, f\}$.

Alors $V_m \cdot (V_n \cdot f) = \{G_m, \{G_n, f\}\}$ et $V_n \cdot (V_m \cdot f) = \{G_n, \{G_m, f\}\}$.

Donc $[V_m, V_n] \cdot f = V_m \cdot (V_n \cdot f) - V_n \cdot (V_m \cdot f) = \{G_m, \{G_n, f\}\} - \{G_n, \{G_m, f\}\}$.

Donc $[V_m, V_n] \cdot f = \{G_m, \{G_n, f\}\} + \{G_n, \{f, G_m\}\}$.

Avec l'identité de Jacobi, on a alors $[V_m, V_n] \cdot f = -\{f, \{G_m, G_n\}\} = \{\{G_m, G_n\}, f\}$.

Or on a $[V_m, V_n] = C_{mnk} V_k$, donc $[V_m, V_n] \cdot f = C_{mnk} V_k \cdot f = -C_{mnk} \{G_k, f\}$.

Donc pour toute observable f , on a $\{\{G_m, G_n\}, f\} = -C_{mnk} \{G_k, f\}$.

Donc, en identifiant, on a $\{G_m, G_n\} + C_{mnk} G_k = a_{mn}$ où les a_{mn} sont des constantes.

On a donc $\boxed{\{G_m, G_n\} = -C_{mnk} G_k + a_{mn}}$.

Cette écriture reflète sur l'espace des phases les propriétés du groupe continu de transformations. A noter que la présence des a_{mn} dépend des cas.

4.6.ii) Etude des rotations

Considérons une rotation d'angle ε autour de l'axe (Oz) .

On a alors $\delta X = -\varepsilon Y$, $\delta Y = \varepsilon X$ et $\delta Z = 0$.

On définit le moment cinétique d'une particule par $\boxed{\vec{L} = \vec{X} \wedge \vec{P}}$.

On considère la troisième coordonnée du moment cinétique $L_Z = X P_Y - Y P_X$.

Alors $\{L_Z, X\} = \{X P_Y - Y P_X, X\} = X \{P_Y, X\} - Y \{P_X, X\} = -Y$.

De plus, $\{L_Z, Y\} = \{X P_Y - Y P_X, Y\} = X \{P_Y, Y\} - Y \{P_X, Y\} = X$.

Enfin, $\{L_Z, Z\} = \{X P_Y - Y P_X, Z\} = X \{P_Y, Z\} - Y \{P_X, Z\} = 0$.

On sait par ailleurs que L_Z engendre $\delta \vec{X} = \varepsilon \{L_Z, \vec{X}\}$.

On obtient alors que L_Z engendre les rotations autour de l'axe (Oz).

De manière générale, L_i engendre les rotations autour de l'axe i .

On a $\vec{L} = \vec{X} \wedge \vec{P}$, donc $L_i = \varepsilon_{ijk} X_j P_k$ où $[\varepsilon]$ est le tenseur de Levi-Civita.

Donc $\{L_i, X_j\} = \{\varepsilon_{imn} X_m P_n, X_j\} = \varepsilon_{imn} X_m \{P_n, X_j\} = \varepsilon_{imn} X_m \delta_{jn} = \varepsilon_{imj} X_m$.

D'où finalement, $\{L_i, X_j\} = -\varepsilon_{ijm} X_m$.

De plus, $\{L_i, P_j\} = \{\varepsilon_{imn} X_m P_n, P_j\} = \varepsilon_{imn} P_n \{X_m, P_j\} = -\varepsilon_{imn} P_n \delta_{jm} = -\varepsilon_{ijn} P_n$.

Enfin, $\{L_i, L_j\} = \{\varepsilon_{imn} X_m P_n, \varepsilon_{jkl} X_k P_l\} = \varepsilon_{jkl} \{L_i, X_k\} P_l + \varepsilon_{jkl} \{L_i, P_l\} X_k$
 $= \varepsilon_{jkl} (-\varepsilon_{ikm} X_m) P_l + \varepsilon_{jkl} (-\varepsilon_{iln} P_n) X_k = -\varepsilon_{jlk} \varepsilon_{kim} X_m P_l - \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{lin} P_n X_k$.

On utilise une propriété du tenseur de Levi-Civita : $\boxed{\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{lj}}$.

$\{L_i, L_j\} = -(\delta_{ji} \delta_{lm} - \delta_{jm} \delta_{li}) X_m P_l - (\delta_{jn} \delta_{ki} - \delta_{ji} \delta_{kn}) P_n X_k$
 $= -\delta_{ij} (\delta_{lm} X_m P_l - \delta_{kn} P_n X_k) + \delta_{jm} \delta_{li} X_m P_l - \delta_{jn} \delta_{ki} P_n X_k$
 $= -\delta_{ij} (X_m P_m - P_n X_n) + X_j P_i - P_j X_i = \delta_{ij} (\vec{X} \cdot \vec{P} - \vec{P} \cdot \vec{X}) + X_j P_i - P_j X_i$.

Donc finalement, $\boxed{\{L_i, L_j\} = X_j P_i - P_j X_i}$.

D'où $\{L_i, L_j\} = -(X_i P_j + X_j P_i) = -\varepsilon_{ijk} L_k$ car $L_i = \varepsilon_{ijk} X_j P_k$.

On a donc la propriété $\boxed{\{L_i, L_j\} = -\varepsilon_{ijk} L_k}$.

Les coordonnées du moment cinétique apparaissent donc comme générateurs des rotations avec les constantes de structure $C_{ijk} = -\varepsilon_{ijk}$.

On a aussi vu que $\{L_i, X_j\} = -\varepsilon_{ijk} X_k$, $\{L_i, P_j\} = -\varepsilon_{ijk} P_k$ et $\{L_i, L_j\} = -\varepsilon_{ijk} L_k$.

Ces formules signifient que \vec{X} , \vec{P} et \vec{L} se transforment de la même manière sous rotations.

Que dire du cas de \vec{X}^2 ?

On a $\{L_i, X_j\} = -\varepsilon_{ijk} X_k$, donc $\{L_i, X_j X_j\} = 2\{L_i, X_j\} X_j = -2\varepsilon_{ijk} X_j X_k$
 $= 2\varepsilon_{ikj} X_k X_j = (\vec{X} \wedge \vec{X})_i = 0$.

Donc $\{L_i, \vec{X}^2\} = 0$, et de même, $\{L_i, \vec{P}^2\} = 0$ et $\{L_i, \vec{L}^2\} = 0$.

Application :

Particule dans un potentiel central : $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r)$.

On a $\{H, L_i\} = 0$ et $\{H, \vec{L}^2\} = 0$.

On a donc H , L_i et \vec{L}^2 qui commutent entre elles du point de vue du crochet de Poisson. Ces résultats sont très utiles en mécanique quantique.

6 Introduction à la Relativité Restreinte

Démarche suivie dans ce cours :

- Non historique ;
- Tournée vers le cheminement vers la relativité générale ;
- Structure intrinsèque de l'espace-temps.

Difficulté :

Abandonner certains automatismes intuitifs, en particulier la notion de simultanéité absolue.

I - Conflit entre mécanique et électromagnétisme

1. Relativité galiléenne et structure sous-jacente de l'espace-temps

– Constatation :

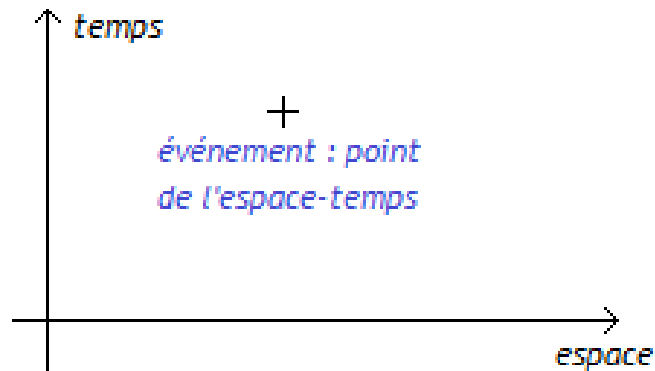
- C1 : les lois de la physique fondamentale (typiquement, la gravité) sont invariantes sous les transformations de Galilée $\vec{X}' = \vec{X} - \vec{v}_e t, t' = t$.

– Principes :

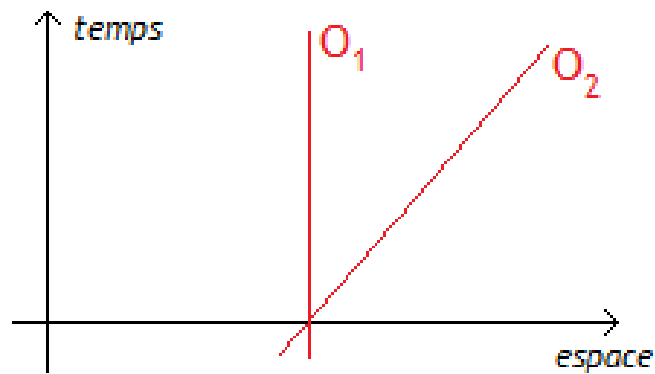
- P1 : principe de relativité restreinte :
 - i) Existence d'observateurs privilégiés : les observateurs d'inertie. Ce sont des observateurs qui savent de manière absolue, sans faire référence à d'autres observateurs, que leur accélération est nulle (caractère RESTREINT) ;
 - ii) Tous les observateurs d'inertie se déplacent à vitesses constantes les uns par rapport aux autres. Aucun observateur d'inertie ne peut se déclarer au repos de manière absolue (caractère RELATIF).
- P2 : il n'y a pas de limite à la vitesse d'un observateur.

P1 reste vrai en relativité restreinte d'Einstein, mais pas P2.

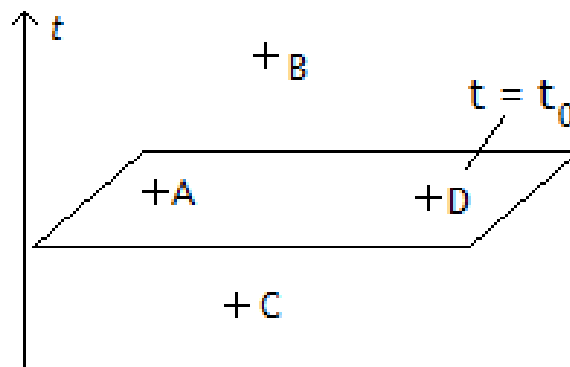
Représentation de l'espace-temps :



Lignes d'univers pour les observateurs et particules :



O_1 et O_2 sont ici deux observateurs d'inertie, O_2 se déplace à vitesse constante par rapport à O_1 .



Sur le dernier graphe d'espace-temps, on considère un point A , et sa surface d'événements simultanés, à laquelle appartient le point D .

On distingue alors plusieurs cas : il est possible d'aller de C à A ou de A à B , mais il est impossible d'être à la fois en A et en D .

On a les notions intuitives de passé, futur, et d'événements simultanés, plus précisément de simultanéité absolue, c'est-à-dire que la surface d'événements simultanés à A est la même pour tous les observateurs.

– P3 : les surfaces d'événements simultanés sont décrites par la géométrie euclidienne.

Quelles sont alors les propriétés intrinsèques (indépendantes de l'observateur) de l'espace-temps en physique newtonienne ?

Deux événements sont soit séparés par une différence de temps Δt , soit simultanés et alors toujours séparés par une distance spatiale ΔX .

Les transformations de Galilée préservent justement cette structure.

On pose $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}_e t$ et $t' = t$ et on considère deux événements A et B repérés par (t_A, \vec{r}_A) et (t_B, \vec{r}_B) .

Alors on a $t'_B - t'_A = t_B - t_A$, et si $t_B = t_A$, alors $\vec{r}'_B - \vec{r}'_A = \vec{r}_B - \vec{v}_e t_B - (\vec{r}_A - \vec{v}_e t_A) = \vec{r}_B - \vec{r}_A$.

Les principes P1, P2 et P3 entraînent donc la constatation C1.

2. Electromagnétisme

Constatation :

Les équations de Maxwell ne sont pas invariantes sous transformations de Galilée.

i) L'équation d'onde est régie par l'opérateur d'Alembertien $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$. Or sous transformation de Galilée, cet opérateur devient $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \Delta' - \frac{2}{c^2} \vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}' \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c^2} (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}') (\vec{v}_e \cdot \vec{\nabla}')$.

Il n'y a pas de transformation de jauge qui permette de se débarrasser des termes supplémentaires.

ii) En relativité galiléenne, on a $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}_e$, ce qui est incompatible avec le fait que la vitesse de la lumière est indépendante de l'observateur d'inertie, donc $\vec{c}' = \vec{c}$.

C1' : les lois de l'électromagnétisme sont invariantes sous transformations de Lorentz.

1) Imaginons $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$. On pose $\beta_e = \frac{v_e}{c}$ et $\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}$.

$$\text{On a alors } \left\{ \begin{array}{l} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{array} \right\}.$$

Considérons un photon se déplaçant sur l'axe x , on a $x = ct$.

On a $x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) = \gamma_e(ct - \beta_e ct) = \gamma_e ct(1 - \beta_e)$.

Or $ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) = \gamma_e(ct - \beta_e ct) = \gamma_e ct(1 - \beta_e)$.

On a donc $x' = ct'$ et la célérité est toujours c .

2) Les champs \vec{E} et \vec{B} sont bien sûrs transformés eux aussi.

3) Du point de vue historique, le milieu de propagation était appelé l'éther. Le raisonnement s'est fait par analogie avec l'acoustique. La propagation d'une onde acoustique est également régie par l'équation de d'Alembert. Il y a un référentiel privilégié : celui dans lequel le milieu qui transporte l'onde est au repos.

Conclusion : on assiste donc à un CLASH entre la Mécanique et l'Electromagnétisme.

Le problème a été résolu par Einstein qui a construit une nouvelle mécanique, ayant de bonnes propriétés sous transformations de Lorentz, et dont la mécanique newtonienne est une approximation pour $v \ll c$.

Notons quelques expériences de mesure de c :

- Expérience de Fizeau (cf. TD) ;
- Mesure de c à l'aide de la vitesse de la source ;
- Mesures en fonction de la fréquence (loi de dispersion).

II - Structure de l'espace-temps en relativité restreinte d'Einstein

1. Principes

P1' : principe de relativité restreinte (identique au P1 de la relativité galiléenne) ;

P2' : aucun objet ne peut avoir une vitesse plus grande que c , qui est la vitesse de la lumière dans le vide.

Qu'est-ce qui est intrinsèque à l'espace-temps ?

Nous allons voir que c'est la notion de **métrique**. Considérons deux points très proches, séparés par une longueur infinitésimale dS . On a alors $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$.

Donc $dS^2 = dx_i dx_i = g_{ij} dx_i dx_j$, où g est la métrique, ici $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$.

Si on passe en coordonnées sphériques, $dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 (\sin \theta)^2 d\varphi^2$.

Donc en fait $dS^2 = g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2 + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2$ avec $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 (\sin \theta)^2 \end{bmatrix} \in S_3(\mathbb{R})$.

De manière générale, pour des coordonnées q_i quelconques, $dS^2 = g_{ij}(q_k) dq_i dq_j$, où (g_{ij}) est la métrique, une matrice de $S_3^{++}(\mathbb{R})$ si l'espace est euclidien.

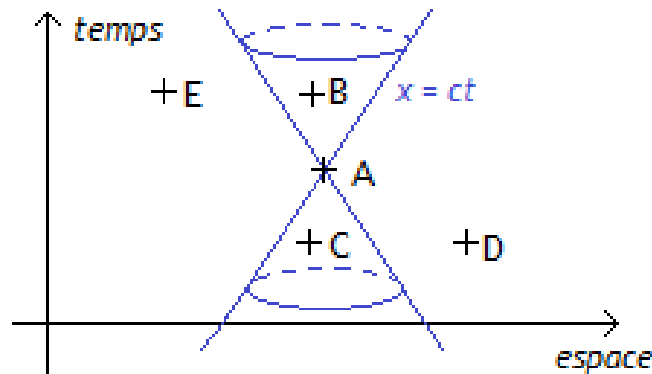
On peut généraliser à des espaces non euclidiens où la métrique n'est pas définie positive : $ds^2 = g_{\mu\nu}dX_\mu dX_\nu$. Par exemple, on va voir qu'en relativité restreinte d'Einstein,

l'espace-temps est muni d'une métrique $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

On l'appelle **espace-temps de Minkowski**.

A noter que $(g_{\mu\nu})$ est toujours symétrique, mais pas toujours définie positive.

2. Cône de lumière



On fixe un événement A . On distingue alors trois cas :

i) Événements situés à l'intérieur du cône de lumière :

Il est possible pour un observateur d'aller de A vers B .

Il est possible pour un observateur d'aller de C vers A .

Ces événements sont alors reliés causalement.

ii) Événements situés sur le cône de lumière :

Signaux lumineux (correspond aux trajectoires de photons incidents ou émis en A).

iii) Événements situés à l'extérieur du cône de lumière :

Impossible d'aller de D à A ou de A à E (que ce soit pour un observateur ou pour un photon).

Considérons les événements E intérieurs au cône de lumière issu de A : on dit que E et A sont séparés par un **intervalle d'espace-temps de genre temps (time-like)**.

Si un événement E est extérieur au cône de lumière issu de A : on dit que E et A sont séparés par un **intervalle d'espace-temps de genre espace (space-like)**.

Enfin, si un événement E est sur le cône de lumière issu de A : on dit que E et A sont séparés par un **intervalle d'espace-temps de genre lumière (light-like)**.

Remarque : la ligne d'univers d'une particule est à l'intérieur de tous les cônes de lumière issus des points par lesquels elle est passée. Cela traduit le fait que la vitesse d'une particule est à tout instant inférieure à c .

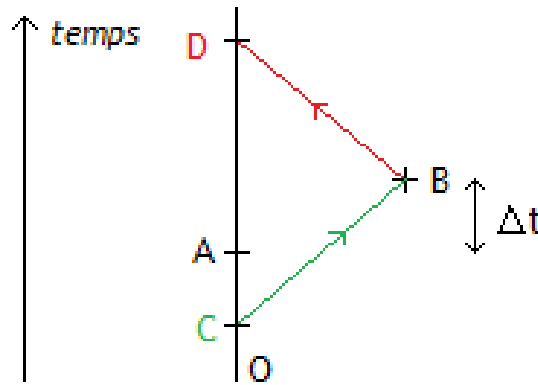
On a donc deux premiers résultats :

- i) la notion de cône de lumière est une propriété intrinsèque de l'espace-temps ;
- ii) les notions de space-like, time-like et light-like sont elles aussi intrinsèques.

3. Perte de la simultanéité absolue

3.1. Δt et Δx entre deux événements

Soient deux événements A et B , et \mathcal{O} un observateur d'inertie passant par A .
 A et B sont séparés spatialement de Δx et temporellement de Δt .



B émet un photon qui croise la ligne d'univers de A en D . Le signal lumineux émis par B est donc observé par \mathcal{O} en D .

Un autre photon est émis par C par l'observateur \mathcal{O} , et reçu en B .

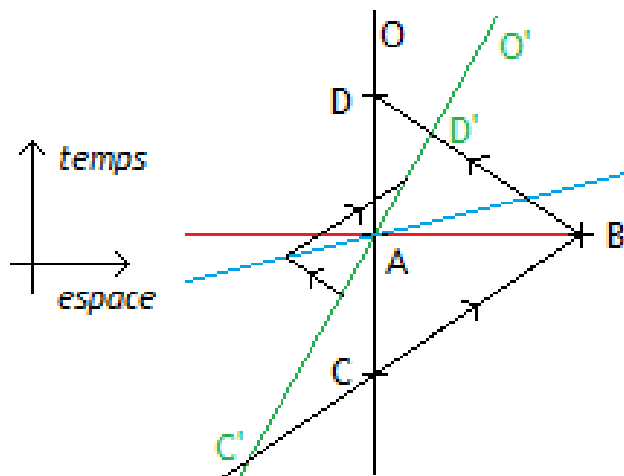
Soient alors t_1 et t_2 les intervalles de temps mesurés par \mathcal{O} respectivement entre A et D et entre C et A .

Vu que A et B sont distants de Δx , et que la lumière fait un aller-retour pendant la durée $t_1 + t_2$, on a $2\Delta x = c(t_1 + t_2)$, d'où $\Delta x = c \frac{t_1 + t_2}{2}$.

De plus, la lumière ne fait qu'un aller simple pendant la durée $t_2 + \Delta t$, on a $\Delta x = c(t_2 + \Delta t)$, d'où, en réutilisant $\Delta x = c \frac{t_1 + t_2}{2}$, $\Delta t = \frac{t_1 - t_2}{2}$.

3.2. Absence de simultanéité absolue

Supposons que dans le cas précédent, A et B sont simultanés pour \mathcal{O} , ce qui signifie que $\Delta t = 0$ et donc $t_1 = t_2$.



Mais pour un autre observateur d'inertie \mathcal{O}' passant par A (la ligne d'univers de \mathcal{O}' est tracée en vert), A et B ne sont pas simultanés. En effet, $C'A \neq AD'$. Par contre, en traçant des rayons lumineux depuis deux points de la ligne verte équidistants de A , on peut construire la surface d'événements simultanés à A pour \mathcal{O}' (tracée en bleu).

Par ailleurs, si on trace les trajets des photons (cônes de lumière) avec une pente 1, alors le cône de lumière est également la bissectrice de la ligne d'univers de \mathcal{O}' et de la surface d'événements simultanés à A pour \mathcal{O}' .

Remarques :

Les lignes d'univers des particules, photons et observateurs sont intrinsèques. Un observateur est simplement une manière de repérer ces lignes d'univers.

Sur les figures, si on prend $c = 1$, alors vu que les observateurs sont massifs, on a $v < c$, et donc des lignes d'univers plus proches de l'axe temporel que de l'axe spatial.

Dernier principe :

P3' : les surfaces d'événements simultanés (relatives à chaque observateur d'inertie) sont décrites par la géométrie euclidienne.

4. Intervalle d'espace-temps

On avait $\Delta t = \frac{t_1 - t_2}{2}$ et $\Delta x = c \frac{t_1 + t_2}{2}$.

Donc $-t_1 t_2 = -(2\Delta t + t_2) \left(\frac{\Delta x}{c} - \Delta t \right) = -(2\Delta t + \frac{\Delta x}{c} - \Delta t) \left(\frac{\Delta x}{c} - \Delta t \right)$.

$-t_1 t_2 = -2\Delta t \frac{\Delta x}{c} + 2(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c} \right)^2 + \Delta t \frac{\Delta x}{c} + \Delta t \frac{\Delta x}{c} - (\Delta t)^2 = (\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c} \right)^2$.

Si Δt est la durée entre deux événements et Δx la distance entre ces deux événements, alors Δs , défini par $(\Delta s)^2 = (\Delta t)^2 - (\frac{\Delta x}{c})^2$, est l'intervalle d'espace-temps entre ces deux événements. On distingue alors trois cas.

Cas 1 : $(\Delta s)^2 = 0$: cela signifie que $(\Delta t)^2 = (\frac{\Delta x}{c})^2$. Les deux événements A et B sont alors séparés par un intervalle du genre *lightlike*. Physiquement, on a que B est sur le cône de lumière issu de A .

Cas 2 : $(\Delta s)^2 > 0$: cela signifie que $(\Delta t)^2 > (\frac{\Delta x}{c})^2$. Les deux événements A et B sont alors séparés par un intervalle du genre *timelike*. Physiquement, on a que B est à l'intérieur (strictement) du cône de lumière issu de A .

Cas 3 : $(\Delta s)^2 < 0$: cela signifie que $(\Delta t)^2 < (\frac{\Delta x}{c})^2$. Les deux événements A et B sont alors séparés par un intervalle du genre *spacelike*. Physiquement, on a que B est à l'extérieur (strictement) du cône de lumière issu de A .

5. Métrique

L'ensemble des résultats vus jusqu'ici indique que la structure intrinsèque de l'espace-temps est, en relativité restreinte d'Einstein, la métrique.

L'intervalle d'espace-temps est un invariant relativiste, c'est-à-dire que pour deux observateurs d'inertie \mathcal{O} et \mathcal{O}' , on a $(\Delta s)^2 = (\Delta s')^2$, soit $(\Delta t)^2 - (\frac{\Delta x}{c})^2 = (\Delta t')^2 - (\frac{\Delta x'}{c})^2$.

Au niveau infinitésimal, on a $(ds)^2 = (dt)^2 - (\frac{dx}{c})^2$.

Si on pose $c = 1$, cela donne $(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$, avec les coordonnées cartésiennes, et on retrouve la métrique $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

En électromagnétisme, on travaille avec une équation d'onde donnée par l'opérateur d'Alembertien $\frac{-1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, lié à cette même métrique.

Raison importante à cela (à retenir) :

En relativité générale, un objet dynamique correspond à une métrique de l'espace-temps. La relativité restreinte correspond au cas limite dans lequel la courbure de l'espace-temps est faible, et donc où la métrique est la métrique dite plate, correspondant à une courbure nulle de l'espace-temps. On obtient alors la structure de l'espace-temps de Minkowski.

Conclusions :

L'intervalle d'espace-temps $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ est un invariant relativiste.

Pour $\mathcal{O}'(dt', \vec{x}')$, on a le même intervalle $(ds')^2 = c^2(dt')^2 - (d\vec{x}')^2 = (ds)^2$.

Le cône de lumière, caractérisé par $(ds)^2 = 0$, est donc aussi invariant.

De même, les notions de *spacelike*, *timelike* et *lightlike* sont aussi invariantes.

La métrique de Minkowski $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ est symétrique mais non définie

positive, et de courbure nulle. On l'appelle la métrique plate.

III - Transformations de Lorentz pures

On établira plus loin que, en dehors des translations spatiales et des rotations, les transformations qui préservent la métrique plate sont données par les **transformations de Lorentz pures** (aussi appelées *boosts*).

Transformation de Lorentz pure selon l'axe x :

On considère deux observateurs d'inertie $\mathcal{O}(t, x, y, z)$ et $\mathcal{O}'(t', x', y', z')$ tels que

$\vec{v}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}} = \vec{v}_e = v_e \vec{u}_x$. On pose alors $\beta_e = \frac{v_e}{c} < 1$ et $\gamma_e = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_e^2}} > 1$.

La transformation est donnée par
$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Cela nous donne les équations suivantes :
$$\begin{cases} ct' = \gamma_e(ct - \beta_e x) \\ x' = \gamma_e(-\beta_e ct + x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}.$$

On remarque que \mathcal{O}' vérifie $x' = y' = z' = 0$, et donc $y = z = 0$ et $x = \beta_e ct = v_e t$, ce qui est bien cohérent avec la situation qu'on avait considérée au départ.

La transformation inverse (pour passer de \mathcal{O}' à \mathcal{O}) est simplement obtenue en changeant v_e en $-v_e$, donc β_e en $-\beta_e$, et γ_e reste γ_e .

La **limite galiléenne** correspond à $v_e \ll c$, donc $\beta_e \ll 1$ et $\gamma_e \simeq 1$. On retrouve d'ailleurs dans le cadre de cette approximation, les formules de la relativité galiléenne : $t' = t$, $x' = x - v_e t$, $y' = y$ et $z' = z$.

La **limite ultra-relativiste** correspond à $v_e \simeq c$, donc $\beta_e \simeq 1$ et $\gamma_e \rightarrow +\infty$.

7 Transformations de Lorentz et leurs conséquences

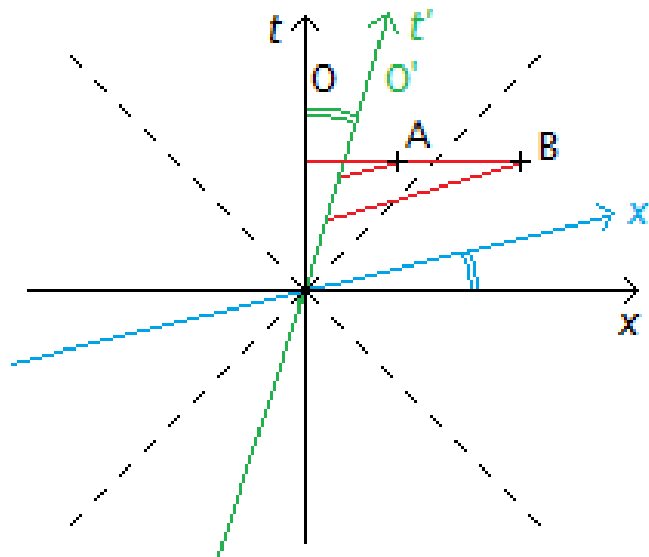
Buts :

- Comprendre les conséquences : dilatation du temps, contraction des longueurs ;
- Notion de temps propre ;
- Langage adéquat (quadrivecteurs, tenseurs) ;
- Quadrivecteurs position et vitesse ;
- Effet Doppler relativiste ;
- Retour sur les transformations de Lorentz.

I - Contraction des longueurs et dilatation du temps

1. Retour sur l'absence de simultanéité absolue

Soient deux observateurs d'inertie \mathcal{O} et \mathcal{O}' tels que $\vec{v}_{\mathcal{O}'/\mathcal{O}} = v_e \vec{u}_x$. On pose $c = 1$.



On a ici représenté les lignes d'univers pour ces deux observateurs, et on voit que les événements A et B sont simultanés pour \mathcal{O} , mais pas pour \mathcal{O}' .

$$\text{En effet, } x' = \gamma_e(x - \beta_e ct) = \frac{x - v_e t}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}} \text{ et } t' = \frac{\gamma_e}{c}(ct - \beta_e x) = \frac{t - \frac{v_e}{c^2}x}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}}$$

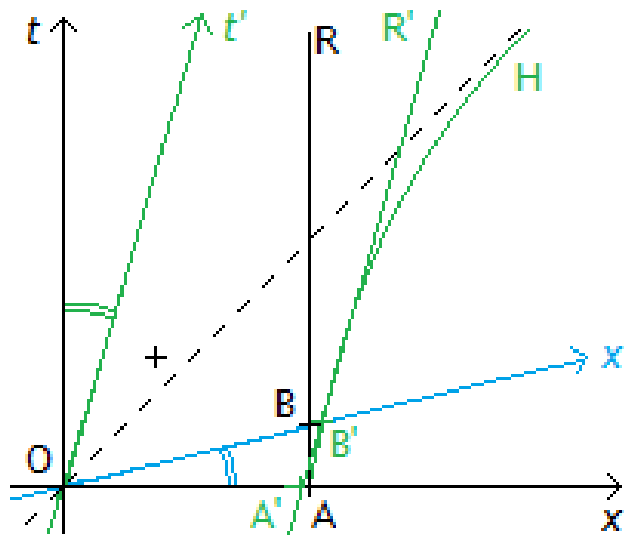
Les axes (x', t') pour \mathcal{O}' sont alors donnés par :

- Axe x' : équation $t' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_e}{c^2}x = v_e x$ si $c = 1$;
- Axe t' : équation $x' = 0 \Leftrightarrow x = v_e t$.

2. Contraction des longueurs

Considérons \mathcal{R} une règle étalon de 1 mètre au repos pour \mathcal{O} .

De même, soit \mathcal{R}' une règle étalon de 1 mètre au repos pour \mathcal{O}' .



A $t = 0$ (et aussi $t' = 0$), \mathcal{R} a une extrémité en O et l'autre en A , et \mathcal{R}' une extrémité en O' (confondu avec O à $t = 0$) et l'autre en B' qui vérifie $t'_{B'} = 0$ et $x'_{B'} = 1$.

$$\text{Or } t'_{B'} = 0 \Leftrightarrow t_{B'} = \frac{v_e}{c^2}x_{B'} \text{ et } x'_{B'} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_{B'} - v_e t_{B'}}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{x_{B'} - v_e \frac{v_e}{c^2}x_{B'}}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow x_{B'} \sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2} = 1, \text{ d'où } x_{B'} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}} \text{ et } t_{B'} = \frac{v_e}{c^2 \sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}}.$$

Donc B' appartient à l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $x^2 - c^2 t^2 = 1$, qui passe par A et asymptote le cône de lumière. La ligne d'univers de la seconde extrémité de \mathcal{R}' passe par B' et est parallèle à la ligne d'univers de sa première extrémité, qui est en O' .

Important : les longueurs se mesurent à un temps fixé.

A $t = 0$, \mathcal{O} mesure \mathcal{R}' , la règle étalon de \mathcal{O}' . Il trouve alors OA' avec $OA' < OA$.

A $t' = 0$, \mathcal{O}' mesure \mathcal{R} , la règle étalon de \mathcal{O} . Il trouve alors OB avec $OB < OB'$.

Une règle au repos par rapport à un observateur d'inertie, vue par un autre observateur d'inertie, est plus courte : contraction des longueurs.

Le point B est caractérisé par $t'_B = 0$ et $x_B = 1$.

Or $ct'_B = \gamma_e(ct_B - \beta_e x_B)$ et $x'_B = \gamma_e(x_B - \beta_e ct_B)$.

Vu que $t'_B = 0$ et $x_B = 1$, on a $ct_B = \beta_e x_B = \beta_e$ et $x'_B = \gamma_e(1 - \beta_e ct_B)$.

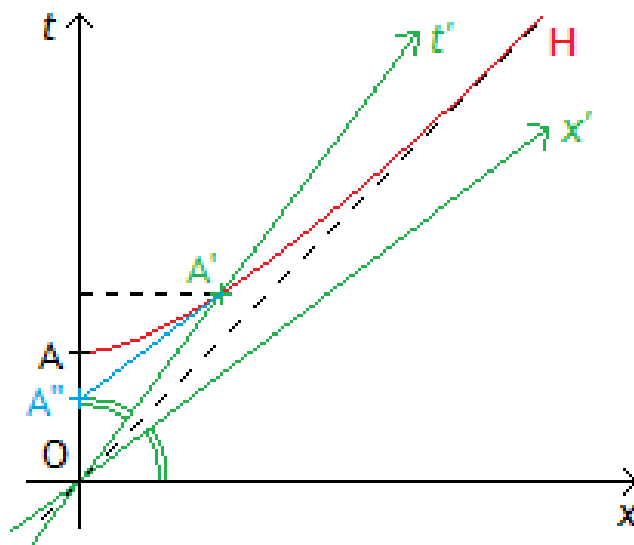
$$\text{Donc } x'_B = \gamma_e(1 - \beta_e^2) = \frac{1 - (\frac{v_e}{c})^2}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}} = \sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2} = \frac{1}{\gamma_e} = \frac{x_B}{\gamma_e}.$$

On a donc $\boxed{x' = \frac{x}{\gamma_e}}$, soit un facteur de contraction qui vaut $\boxed{\frac{1}{\gamma_e} < 1}$.

3. Dilatation des durées

Considérons H une horloge au repos pour \mathcal{O} .

De même, soit H' une horloge au repos pour \mathcal{O}' .



Le point A est caractérisé par $x_A = 0$ et $t_A = 1$ (H marque 1 seconde).

Soit le point A' caractérisé par $x'_{A'} = 0$ et $t'_{A'} = 1$ (H' marque 1 seconde).

Or on a $x'_{A'} = \gamma_e(x_{A'} - \beta_e ct_{A'})$ et $ct'_{A'} = \gamma_e(ct_{A'} - \beta_e x_{A'})$.

Vu que $x'_{A'} = 0$ et $t'_{A'} = 1$, on obtient $x_{A'} = \beta_e ct_{A'}$ et $c = \gamma_e(ct_{A'} - \beta_e x_{A'})$.

Donc $c = \gamma_e(ct_{A'} - \beta_e^2 ct_{A'})$, soit $1 = \gamma_e(1 - \beta_e^2)t_{A'}$.

$$\text{D'où finalement } t_{A'} = \frac{1}{\gamma_e(1 - \beta_e^2)} = \frac{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}}{1 - (\frac{v_e}{c})^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}}.$$

$$\text{Et on trouve alors } x_{A'} = \beta_e ct_{A'} = v_e t_{A'} = \frac{v_e}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}}.$$

Donc A' appartient à l'hyperbole \mathcal{H} d'équation $t^2 - \frac{x^2}{c^2} = 1$, qui passe par A et a pour asymptote le cône de lumière.

$$\text{On a vu que } t_{A'} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}} = \frac{t_A}{\sqrt{1 - (\frac{v_e}{c})^2}} = \gamma_e t_{A'}.$$

Considérons maintenant A'' caractérisé par $x_{A''} = 0$ et $t'_{A''} = 1$.

Or on a $x'_{A''} = \gamma_e(x_{A''} - \beta_e ct_{A''})$ et $ct'_{A''} = \gamma_e(ct_{A''} - \beta_e x_{A''})$.

Vu que $x_{A''} = 0$ et $t'_{A''} = 1$, on obtient $x'_{A''} = -\gamma_e \beta_e ct_{A''}$ et $c = \gamma_e ct_{A''}$.

Donc finalement, $t_{A''} = \frac{1}{\gamma_e} = \frac{t'_{A''}}{\gamma_e}$, d'où $t'_{A''} = \gamma_e t_{A''}$.

On a donc $t' = \gamma_e t$, soit un facteur de dilatation qui vaut $\gamma_e > 1$.

4. Temps propre et repère propre instantané

On a vu que l'intervalle d'espace-temps $(ds)^2$ est un invariant relativiste.

Pour une particule en mouvement, $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (d\vec{x})^2$ et $d\vec{x} = \vec{v}(t)dt$.

Ici, on a posé $\vec{v}(t) = \vec{v}_{M/O}(t)$.

Alors $(ds)^2 = c^2(dt)^2 - (\vec{v}(t)dt)^2 = (c^2 - \vec{v}(t)^2)(dt)^2$ d'où $\frac{(ds)^2}{c^2} = (1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2})(dt)^2$.

On définit alors le temps propre τ tel que $(d\tau)^2 = \frac{(ds)^2}{c^2}$ est invariant.

On peut aussi l'écrire comme $d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)}$ où $\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}$.

Pour un observateur \mathcal{O}' , on aura toujours $d\tau = \frac{dt'}{\gamma(t')}$

Pourquoi appelle-t-on τ le temps propre ?

Tout d'abord, à tout instant t on peut définir \mathcal{R}_t , repère propre instantané lié à la particule, qui se déduit de \mathcal{O} par une transformation de Lorentz.

On remarquera que l'origine spatiale de \mathcal{R}_t correspond à la position de la particule à l'instant t (autrement dit, $\mathcal{R}_t(0, \vec{0})$ correspond à $\mathcal{O}(t, \vec{X}(t))$), que les axes sont non déterminés, et que \mathcal{R}_t est un repère d'inertie à chaque instant.

Dans \mathcal{R}_t , la particule a une vitesse nulle, donc $\Gamma(T) = 1$.

D'où finalement $d\tau = \frac{dT}{\Gamma(T)} = dT$, où T est le temps dans \mathcal{R}_t : le temps propre.

Le temps propre, défini par $(d\tau)^2 = \frac{(ds)^2}{c^2} = \frac{(dt)^2}{\gamma(t)^2}$, correspond au temps mesuré dans le référentiel propre de la particule par l'horloge liée à la particule.

C'est un invariant relativiste : $d\tau = \frac{dt}{\gamma(t)} = \frac{dt'}{\gamma(t')}$

Remarques :

- 1) On a alors $dt = \gamma(t)d\tau$, avec le facteur de dilatation des durées $\gamma(t)$.
- 2) En relativité restreinte, on ne considère que les observateurs d'inertie.

II - Quadrivecteurs et tenseurs

Le livre de Walter Appel est une bonne référence pour l'étude de ces objets.

1. Motivations

Il s'agit de manier un bon langage pour pouvoir écrire les équations physiques en relativité restreinte d'Einstein, et d'avoir de bonnes propriétés sous les transformations de Lorentz. Par exemple, en relativité galiléenne, les vecteurs constituent de bons objets pour traiter les rotations.

2. Vecteurs

Point de départ : en relativité générale, on considère l'espace-temps M et son espace tangent en $X \in M$, que l'on note TM_X . Cet espace tangent a une structure d'espace vectoriel.

En relativité restreinte, l'espace-temps de Minkowski est plat, M et TM_X sont donc confondus et M a alors une structure d'espace vectoriel. Mais attention : on ne peut pas étendre ce résultat à la relativité générale !

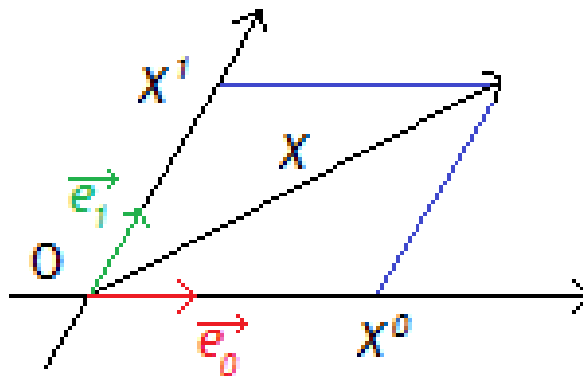
Considérons alors l'espace-temps V à structure d'espace vectoriel.

La coordonnée temporelle étant indicée par 0, on pose une base de V : $(e_\mu)_{\mu=0,1,2,3}$.

Il faut dorénavant faire très attention à la position des indices !

A tout point de V on associe un vecteur X qui s'écrit $X = X^\mu e_\mu$.

Les X^μ sont les coordonnées contravariantes du vecteur X .



Changement de base :

On passe de la base (e_μ) à la base (e'_μ) . On écrit donc $X = X^\mu e_\mu = X'^\nu e'_\nu$.

On multiplie un indice en bas par un indice en haut, et vice et versa...

Autrement dit, $\Lambda^\mu{}_\nu M^\nu{}_\rho = (\Lambda M)^\mu{}_\rho$.

Soit ici Λ la matrice telle que $X'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu X^\mu$.

On pose également la matrice L telle que $e'_\nu = e_\rho L^\rho_\nu$.

On a $X = X^\mu e_\mu = X'^\nu e'_\nu$, donc $X^\mu e_\mu = \Lambda^\nu_\mu X'^\nu e_\rho L^\rho_\nu = L^\rho_\nu \Lambda^\nu_\mu X'^\nu e_\rho$.

Donc finalement, $L^\rho_\nu \Lambda^\nu_\mu = \delta^\rho_\mu$ où δ est le symbole de Kronecker.

Donc L est l'inverse de Λ .

On a donc $\boxed{X'^\nu = \Lambda^\nu_\mu X^\mu}$, $\boxed{e'_\nu = e_\rho L^\rho_\nu}$ et $\boxed{L = \Lambda^{-1}}$.

Remarque : on voit apparaître Λ comme la matrice de passage de (e'_μ) à (e_μ) et L comme la matrice de passage de (e_μ) à (e'_μ) .

3. Formes linéaires

On note V^* le dual de V , c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur V .

Une base de V^* est la base duale de (e_μ) , notée (\mathcal{L}^μ) .

Cette base est définie par $\boxed{\mathcal{L}^\mu(e_\nu) = \delta^\mu_\nu}$.

On a en particulier la propriété $\boxed{\mathcal{L}^\mu(X) = X^\mu}$.

En effet, $\mathcal{L}^\mu(X) = \mathcal{L}^\mu(X^\nu e_\nu) = X^\nu \mathcal{L}^\mu(e_\nu) = X^\nu \delta^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu X^\nu = X^\mu$.

\mathcal{L}^μ a pour effet de donner une composante contravariante.

Soit alors une forme linéaire quelconque $\omega = \omega_\mu \mathcal{L}^\mu$.

Alors les ω_μ sont les composantes covariantes de la forme linéaire ω .

Remarque :

On a $\omega(X) = \omega_\mu \mathcal{L}^\mu(X) = \omega_\mu X^\mu \in \mathbb{R}$, où l'on retrouve l'expression d'une forme linéaire appliquée à un vecteur vue en algèbre linéaire.

Changement de base :

Comme précédemment, on passe de (e_μ) à (e'_μ) .

On pose $X'^\nu = \Lambda^\nu_\mu X^\mu$ et on cherche la base duale (\mathcal{L}'^μ) de (e'_μ) .

Celle-ci est caractérisée par $\mathcal{L}'^\mu(e'_\nu) = \delta^\mu_\nu$.

Or on a $\mathcal{L}'^\mu(e'_\nu) = \mathcal{L}'^\mu(e_\rho L^\rho_\nu) = L^\rho_\nu \mathcal{L}'^\mu(e_\rho)$.

On décompose alors $\mathcal{L}'^\mu = B^\mu_\sigma \mathcal{L}^\sigma$.

Alors $\mathcal{L}'^\mu(e'_\nu) = L^\rho_\nu B^\mu_\sigma \mathcal{L}^\sigma(e_\rho) = L^\rho_\nu B^\mu_\sigma \delta^\sigma_\rho = L^\rho_\nu B^\mu_\rho = B^\mu_\rho L^\rho_\nu$.

On a donc $B^\mu_\rho L^\rho_\nu = \delta^\mu_\nu$, donc $B = L^{-1}$. Or $L^{-1} = \Lambda$, donc $B = \Lambda$.

Finalement, si $X'^\nu = \Lambda^\nu_\mu X^\mu$ et $e'_\nu = e_\rho L^\rho_\nu$, on a :

$\boxed{\mathcal{L}'^\nu = \Lambda^\nu_\mu \mathcal{L}^\mu}$, $\boxed{\omega'_\nu = \omega_\rho L^\rho_\nu}$ et $\boxed{L = \Lambda^{-1}}$.

Remarques :

1) On peut aussi considérer V l'ensemble des applications linéaires de V^* dans \mathbb{R} .

2) Soit une fonction scalaire ϕ définie sur V . Alors $\vec{\nabla} \phi$ définit naturellement une forme linéaire sur V . On a alors plusieurs propriétés intéressantes.

i) On sait que l'on a $\frac{\partial}{\partial X^\mu} = \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\mu} \frac{\partial}{\partial X'^\nu}$. De plus, $X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$.

Par ailleurs, le cadre de la relativité restreinte garantit que Λ ne dépend pas de X .

On a donc $\frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\mu} = \Lambda^\nu_\mu$, d'où $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial X^\mu} = \Lambda^\nu_\mu \frac{\partial}{\partial X'^\nu} = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu$.

Donc $\partial_\mu = \Lambda^\nu_\mu \partial'_\nu$, ou encore $\partial'_\mu = \partial_\nu \Lambda^\nu_\mu$.

ii) On a également $dX'^\mu = \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\nu} dX^\nu$.

iii) Pour une fonction scalaire ϕ , on a $d\phi_X(h) = h^\mu \frac{d\phi}{dX^\mu} \in \mathbb{R}$.

4. Tenseurs

Les tenseurs sont en fait une généralisation des vecteurs et des formes linéaires.

Un tenseur d'ordre (p, q) est un élément de $V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$, où \otimes désigne le produit tensoriel, et V et V^* apparaissent respectivement p et q fois.

Il s'agit donc d'une application multilinéaire de $V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V$ dans \mathbb{R} (cette fois, ce sont des produits cartésiens, et V^* apparaît p fois et V q fois).

Exemple :

Soient $\omega, \lambda \in V^*$. Alors $\omega \otimes \lambda$ est une application bilinéaire de $V \times V$ dans \mathbb{R} définie comme suit : $\forall X, Y \in V, (\omega \otimes \lambda)(X, Y) = \omega(X)\lambda(Y)$.

Plus généralement, si T est un tenseur d'ordre (p, q) et S un tenseur d'ordre (p', q') , on a : $(T \otimes S)(\omega_{a_1}, \dots, \omega_{a_{p+p'}}, X_{b_1}, \dots, X_{b_{q+q'}}) =$

$$T(\omega_{a_1}, \dots, \omega_{a_p}, X_{b_1}, \dots, X_{b_q}) S(\omega_{a_{p+1}}, \dots, \omega_{a_{p+p'}}, X_{b_{q+1}}, \dots, X_{b_{q+q'}}).$$

Une base de l'espace des tenseurs d'un ordre donné est obtenue en effectuant le produit tensoriel des bases autant de fois que l'ordre considéré le nécessite. Concrètement, pour l'ordre (p, q) , les vecteurs de la base sont les $e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes \mathcal{L}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}^{\nu_q}$, où les $\mu_1, \dots, \mu_p, \nu_1, \dots, \nu_q$ prennent toutes les valeurs entières comprises (au sens large) entre 0 et $\dim(V) - 1$.

Si on note $T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q}$ les coefficients de la décomposition de T , on a :

$$T = T^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_p} \otimes \mathcal{L}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}^{\nu_q}.$$

Changement de coordonnées

Si on écrit T à l'aide d'une nouvelle base (e'_μ) , associée aux (\mathcal{L}'^μ) , on a :

$$T = T'^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} e'_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e'_{\mu_p} \otimes \mathcal{L}'^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}'^{\nu_q}$$

$$\text{avec } T'^{\mu_1, \dots, \mu_p}_{\nu_1, \dots, \nu_q} = \Lambda^{\mu_1}_{\rho_1} \dots \Lambda^{\mu_p}_{\rho_p} T^{\rho_1, \dots, \rho_p}_{\sigma_1, \dots, \sigma_q} L^{\sigma_1}_{\nu_1} \dots L^{\sigma_q}_{\nu_q}.$$

Un tenseur est un objet géométrique indépendant de la base choisie.

Exemple :

Considérons un tenseur d'ordre $(1, 1)$, donc une application bilinéaire $V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$.

On obtient en fait une matrice carrée dont la taille est la dimension de V .

5. Métrique

La métrique nous permet de définir un « produit scalaire non défini positif » sur V .

On note alors $\forall X, Y \in V, X.Y = (X, Y) = g(X, Y)$.

g apparaît donc comme une application bilinéaire $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, et donc naturellement comme un tenseur d'ordre $(0, 2)$.

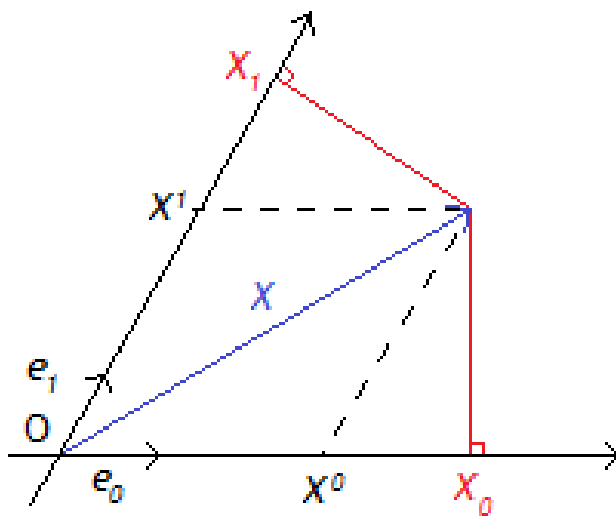
On écrit $\boxed{g = g_{\mu\nu} \mathcal{L}^\mu \otimes \mathcal{L}^\nu}$ avec $g_{\mu\nu} = e_\mu . e_\nu$.

Dans le cadre de la relativité restreinte, on a $g = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

A chaque $X \in V$, on associe $\omega_X \in V^*$ telle que $\forall Y \in V, \omega_X(Y) = X.Y \in \mathbb{R}$.

On a alors $\omega_X = (\omega_X)_\mu \mathcal{L}^\mu$ avec $(\omega_X)_\mu = (X, e_\mu)$.

Les coefficients $(\omega_X)_\mu$ sont appelés coordonnées covariantes du vecteur X , et notés X_μ .



Sur la figure ci-dessus, on a représenté en noir la détermination des coordonnées contravariantes (projection suivant les axes des vecteurs de la base), et en rouge la détermination des coordonnées covariantes (projection orthogonale).

X^μ et X_μ sont reliées par $\boxed{X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu}$.

Dans le cadre de la relativité restreinte, cela signifie que $\boxed{X_0 = X^0}$, et $\boxed{X_i = -X^i}$.

Démontrons ces formules :

$$X_\mu = (X, e_\mu) = (X^\nu e_\nu, e_\mu) = X^\nu (e_\nu, e_\mu) = X^\nu g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu} X^\nu \text{ car } g \text{ est symétrique.}$$

$$\text{Pour } \mu = 0, \text{ on a donc } X_0 = g_{0\nu} X^\nu = g_{00} X^0 = X^0.$$

$$\text{Pour } \mu = 1, 2, 3, \text{ on a } X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu = g_{\mu\mu} X^\mu = -X^\mu.$$

(X^μ) est ce qu'on appelle un **quadrivecteur**.

De même, pour $\omega \in V^*$, il existe un unique $X_\omega \in V$ tel que pour tout $Y \in V$, on a $\omega(Y) = (X_\omega, Y)$.

On pose alors $\omega^\mu = X_\omega^\mu$: les coordonnées contravariantes de ω .

Produit scalaire de deux vecteurs :

$$(X, Y) = g(X, Y) = g(X^\mu e_\mu, X^\nu e_\nu) = X^\mu X^\nu g(e_\mu, e_\nu) = X^\mu X^\nu g_{\mu\nu}.$$

$$\text{Dans le cadre de la relativité restreinte, } (X, Y) = X^\mu X^\nu g_{\mu\nu} = X^0 Y^0 - X^i Y^i.$$

Le produit scalaire est par ailleurs invariant sous changement de coordonnées :

$$X'^\mu Y'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu Y_\rho L^\rho{}_\mu = L^\rho{}_\mu \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu Y_\rho = \delta^\rho{}_\nu X^\nu Y_\rho = X^\nu Y_\nu.$$

Produit scalaire généralisé aux tenseurs :

$$\text{Pour } X, Y, Z, T \in V, \text{ on pose } (X \otimes Y) \cdot (Z \otimes T) = (X \cdot Z)(Y \cdot T) \in \mathbb{R}.$$

L'isomorphisme entre V et V^* se généralise aux tenseurs. Par exemple, à la métrique g , qui est un tenseur d'ordre $(0, 2)$, on fait correspondre \tilde{g} d'ordre $(2, 0)$.

On peut alors écrire $\tilde{g} = \tilde{g}^{\mu\nu} e_\mu \otimes e_\nu$ et \tilde{g} est caractérisé par :

$$\forall X, Y \in V, \tilde{g}(X \otimes Y) = g(X, Y), \text{ d'où } \tilde{g}^{\mu\nu} (e_\mu \otimes e_\nu)(X \otimes Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu.$$

$$\text{Soit } \tilde{g}^{\mu\nu} (e_\mu \cdot X)(e_\nu \cdot Y) = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu, \text{ donc } \tilde{g}^{\mu\nu} X_\mu Y_\nu = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu.$$

$$\text{Alors } \tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\rho} X^\rho g_{\nu\sigma} Y^\sigma = g_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu, \text{ ou encore } \tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\rho} X^\rho g_{\nu\sigma} Y^\sigma = g_{\rho\sigma} X^\rho Y^\sigma.$$

$$\text{Donc, en identifiant, } \tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma}, \text{ soit } g_{\mu\rho} \tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma}.$$

$$\text{Et vu que } g \text{ est symétrique, } g_{\rho\mu} \tilde{g}^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma}, \text{ d'où } (g\tilde{g})^\nu{}_\rho g_{\nu\sigma} = g_{\rho\sigma}.$$

$$\text{D'où finalement } (g\tilde{g})_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}, \text{ et donc } g\tilde{g}g = g, \text{ soit } \boxed{\tilde{g} = g^{-1}}.$$

Dans le cas de la relativité restreinte, on a $g^{-1} = g$, donc $\tilde{g} = g$, et $\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$.

On monte et on baisse les indices avec la métrique :

$$\boxed{X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu} \text{ et } \boxed{X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu}.$$

6. Ce qu'il faut retenir

6.1. Coordonnées

Les X^μ sont les **coordonnées contravariantes** et les X_μ sont les **coordonnées covariantes**.

On a en particulier les relations $X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$ et $X^\mu = g^{\mu\nu} X_\nu$.

Ces relations donnent dans notre cas $X_0 = X^0$ et $X_i = -X^i$.

6.2. Sur les indices

De manière générale, $T^{\mu\nu}{}_{\rho} = g^{\mu\sigma} T_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\rho} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\tau} T_{\sigma\tau\rho}$.

Les indices ne se baladent jamais tout seuls.

On a $A.B = A^{\mu} B_{\mu} = A_{\mu} B^{\mu} = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}$.

On a les dérivées **covariante** $\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}}$ et **contravariante** $\partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial X_{\mu}}$.

Sous changements de coordonnées, $X'_{\mu} = X_{\nu} L^{\nu}{}_{\mu}$ et $X'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} X^{\nu}$.

Cela se traduit par $\boxed{\partial'_{\mu} = \partial_{\nu} L^{\nu}{}_{\mu}}$ et $\boxed{\partial'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \partial^{\nu}}$.

6.3. Exercice

$$\text{On a } \begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

On pose également le quadrivecteur $(\frac{\partial}{\partial X^{\mu}}) = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla})$.

$$\begin{aligned} \text{On calcule } \gamma_e \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \beta_e \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \gamma_e \left(\frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \beta_e \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ &= \gamma_e \left(\frac{1}{c} \gamma_e \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{1}{c} \beta_e^2 \gamma_e \frac{\partial}{\partial t'} \right) = \frac{1}{c} \gamma_e^2 (1 - \beta_e^2) \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } \gamma_e \left(\beta_e \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) &= \gamma_e \left(\beta_e \frac{1}{c} \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \right) \\ &= \gamma_e (-\gamma_e \beta_e^2 + \gamma_e) \frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'}. \end{aligned}$$

$$\text{On a donc finalement } \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & \gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ \gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

On a d'ailleurs le quadrivecteur $(\frac{\partial}{\partial X_{\mu}}) = (\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla})$.

Rappel :

Le produit scalaire $A_{\mu} B^{\mu}$ est un invariant relativiste :

$$A'_{\mu} B'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} B^{\rho} A_{\sigma} L^{\sigma}{}_{\mu} = (L^{\sigma}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho}) B^{\rho} A_{\sigma} = \delta^{\sigma}{}_{\rho} B^{\rho} A_{\sigma} = A_{\mu} B^{\mu}.$$

Ce résultat se généralise au cas des tenseurs : $F_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ est un invariant relativiste, etc.

C'est très intéressant car on a la même valeur quel que soit le référentiel d'inertie.

III - Quadrivecteur vitesse

1. Retour sur l'intérêt des tenseurs

En relativité restreinte, la formulation des lois physiques se fait à l'aide des tenseurs.

Si un observateur d'inertie \mathcal{O} écrit une loi physique sous la forme $A^\mu = B^\mu$, alors \mathcal{O}' l'écrira $A'^\mu = B'^\mu$, car A et B subissent la même transformation inversible.

La covariance sous les transformations de Lorentz est donc automatique.

Par exemple, $\text{div} \vec{B} = 0$ s'écrit $\partial_\mu B^\mu = 0$.

2. Quadrivecteur vitesse

On a le quadrivecteur position $(X^\mu) = (ct, \vec{X})$.

Définissons alors le quadrivecteur $(U^\mu) = \left(\frac{dX^\mu}{d\tau}\right)$ où τ est le temps propre.

On a d'ailleurs $U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dX^\mu}{dt}$, où γ et t sont ceux d'une particule donnée.

On a donc finalement $(U^\mu) = \left(\gamma c, \gamma \frac{d\vec{X}}{dt}\right)$, soit $U_0 = \gamma c$ et $\vec{U} = \gamma \vec{v}$.

Sous $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O}'$, donc sous transformation de Lorentz, on a $U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$.

On a $U_\mu U^\mu = (U_0)^2 - \vec{U}^2 = \gamma^2 c^2 - \gamma^2 v^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma^2 c^2 \frac{1}{\gamma^2} = c^2$.

On remarque d'ailleurs que dans le référentiel propre instantané d'une particule, on aura $U^{*\mu} = (c, \vec{0})$ (car $\vec{v}^* = \vec{0}$ et $\gamma = 1$), et donc $U^{*\mu} U^*_{\mu} = 0$.

Transformation des vitesses :

On passe d'un observateur d'inertie \mathcal{O} à un observateur d'inertie \mathcal{O}' , de vitesse \vec{v}_e par rapport au précédent. On a $(U^\mu) = (\gamma_v c, \gamma_v \vec{v})$ et $(U'^\mu) = (\gamma_{v'} c, \gamma_{v'} \vec{v}')$.

Or on sait que $U'^\mu = \Lambda^\mu_\nu U^\nu$ (où Λ est une transformation de Lorentz).

On choisit notre repère tel que $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$.

On peut alors décomposer les vitesses selon ces axes : $\vec{v} = v_{//} \vec{e}_x + \vec{v}_\perp$.

On applique alors la transformation de Lorentz à U :

$$\text{On a donc finalement } \begin{bmatrix} \gamma_{v'} c \\ \gamma_{v'} v'_{//} \\ \gamma_{v'} \vec{v}'_\perp \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_v c \\ \gamma_v v_{//} \\ \gamma_v \vec{v}_\perp \end{bmatrix}.$$

On a donc $\gamma_{v'} c = \gamma_e (\gamma_v c - \beta_e \gamma_v v_{//})$, donc $\gamma_{v'} = \gamma_e \gamma_v \left(1 - \frac{\beta_e v_{//}}{c}\right)$.

Ce qui nous mène finalement à $\gamma_{v'} = \gamma_e \gamma_v \left(1 - \frac{v_e v_{//}}{c^2}\right)$.

On a aussi $\gamma_{v'} v'_{//} = -\gamma_e \beta_e \gamma_v c + \gamma_e \gamma_v v_{//}$.

D'où $v'_{//} = \frac{\gamma_e \gamma_v}{\gamma_{v'}} (v_{//} - \beta_e c)$, et donc finalement $v'_{//} = \frac{v_{//} - v_e}{1 - \frac{v_e v_{//}}{c^2}}$.

Enfin, on a $\gamma_{v'} \vec{v}'_{\perp} = \gamma_v \vec{v}_{\perp}$, d'où $\vec{v}'_{\perp} = \frac{\gamma_v}{\gamma_{v'}} \vec{v}_{\perp} = \frac{1}{\gamma_e (1 - \frac{v_e v_{\parallel}}{c^2})} \vec{v}_{\perp}$.

Ce qui nous mène finalement à $\boxed{\vec{v}'_{\perp} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}}{(1 - \frac{v_e v_{\parallel}}{c^2})} \vec{v}_{\perp}}$.

Les lois de composition des vitesses sont donc différentes de celles que l'on connaît en relativité galiléenne.

Ceci étant, on voit bien que dans la limite où $v_e \ll c$ et $v_{\parallel} \ll c$, on retombe sur les lois de composition de la relativité galiléenne.

Remarques et exercices :

On peut retrouver ces résultats à partir de
$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

et de calculs de dérivées par rapport à t .

On peut également vérifier que les lois de composition obtenues vérifient

$$v_{\parallel}^2 + \vec{v}_{\perp}^2 \leq c^2 \Rightarrow v_{\parallel}'^2 + \vec{v}_{\perp}'^2 \leq c^2.$$

Enfin, on peut appliquer ces lois dans le cadre de l'expérience de Fizeau (cf. TD).

IV - Effet Doppler relativiste

Avant toutes choses, il nous faut trouver un bon outil pour étudier les ondes électromagnétiques d'un point de vue relativiste : le quadrivecteur impulsion-énergie.

On admet que $\boxed{k^{\mu} = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})}$ est un quadrivecteur.

La phase $k^{\mu} X_{\mu} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{X}$ est un invariant relativiste.

Loi de dispersion d'un photon : $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{u}$ avec $\vec{u}^2 = 1$, \vec{u} donnant la direction de propagation du photon. On a donc $k^{\mu} k_{\mu} = \frac{\omega^2}{c^2} - \vec{k}^2 = 0$, soit $\boxed{k^{\mu} k_{\mu} = 0}$.

Interprétation de ce dernier résultat : le photon est une particule de masse nulle (cf. chapitre suivant).

Situation considérée :

On a une source S fixe par rapport à un premier observateur \mathcal{O} . S émet une onde électromagnétique. Un second observateur \mathcal{O}' se déplace à vitesse constante \vec{v}_e par rapport à \mathcal{O} (et donc par rapport à S). Le quadrivecteur énergie-impulsion subit alors une

transformation de Lorentz :
$$\begin{bmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ k'_{\parallel} \\ \vec{k}'_{\perp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\omega}{c} \\ k_{\parallel} \\ \vec{k}_{\perp} \end{bmatrix}.$$

Bien sûr, on a posé $\vec{k} = k_{\parallel} \vec{e}_x + \vec{k}_{\perp}$ avec $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$.

Soit θ l'angle mesuré par \mathcal{O} entre \vec{v}_e et \vec{k} .

De même, soit θ' l'angle mesuré par \mathcal{O}' entre \vec{v}_e et \vec{k}' .

On déduit de la transformation de Lorentz que $\frac{\omega'}{c} = \gamma_e(\frac{\omega}{c} - \beta k_{\parallel})$.

Donc $\omega' = \gamma_e(\omega - v_e k_{\parallel}) = \gamma_e(\omega - v_e k \cos \theta) = \gamma_e \omega (1 - \frac{v_e}{\omega} k \cos \theta) = \gamma_e \omega (1 - \frac{v_e}{\omega} \frac{\omega}{c} \cos \theta)$.

Donc l'effet Doppler relativiste est formulé par $\boxed{\omega' = \gamma_e \omega (1 - \beta_e \cos \theta)}$.

La relation inverse (ω en fonction de ω') est obtenue en remplaçant \mathcal{O} par \mathcal{O}' , θ par θ' et β_e par $-\beta_e$, γ_e restant γ_e .

On a alors $\boxed{\omega = \gamma_e \omega' (1 + \beta_e \cos \theta')}$.

Donc on a $\omega' = \gamma_e \omega (1 - \beta_e \cos \theta)$ et $\omega' = \frac{\omega}{\gamma_e (1 + \beta_e \cos \theta')}$.

Du coup, $\gamma_e \omega (1 - \beta_e \cos \theta) = \frac{\omega}{\gamma_e (1 + \beta_e \cos \theta')}$, d'où $(1 - \beta_e \cos \theta)(1 + \beta_e \cos \theta') = \frac{1}{\gamma_e^2}$.

Après calculs, on trouve la relation $\boxed{\tan \theta' = \frac{\sin \theta}{\gamma (\cos \theta - \beta)}}$.

Applications :

Cas 1 : $\vec{k}_{\perp} = \vec{0} = \vec{k}'_{\perp}$:

Deux possibilités : soit \mathcal{O}' s'éloigne de S , soit il s'en rapproche.

Considérons qu'il s'en rapproche : on a alors $\theta = \theta' = \pi$.

Donc $\omega' = \gamma_e \omega (1 - \beta_e \cos \theta) = \gamma_e \omega (1 + \beta_e) = \omega \frac{1 + \beta_e}{\sqrt{1 - \beta_e^2}}$, d'où $\boxed{\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}}}$.

On a donc que si on s'approche de la source, on perçoit $\omega' > \omega$.

Cet effet, qui est d'ordre $\frac{v_e}{c}$, est déjà présent en relativité galiléenne, mais il s'écrit alors $\omega' = \omega(1 + \beta_e)$. D'ailleurs on a, pour $\beta_e \ll 1$:

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}} \simeq \frac{1 + \frac{\beta_e}{2}}{1 - \frac{\beta_e}{2}} \omega \simeq (1 + \frac{\beta_e}{2})(1 + \frac{\beta_e}{2}) \omega \simeq (1 + \beta_e) \omega.$$

Cas 2 (nouveau) : $\vec{k}'_{\perp} \perp \vec{v}$, soit $\theta' = \frac{\pi}{2}$:

On a alors $\omega' = \frac{\omega}{\gamma (1 + \beta \cos \theta')} = \frac{\omega}{\gamma} = \omega \sqrt{1 - \beta_e^2}$.

Cet effet, qui est d'ordre $\frac{v_e^2}{c^2}$ et donne $\omega' < \omega$, n'apparaît pas en relativité galiléenne.

V - A propos des paradoxes

La difficulté de la relativité restreinte est que la perte de simultanéité absolue peut mener à des situations apparemment paradoxales.

Comment procéder alors ? Chaque fois que c'est possible, il faudra effectuer des raisonnements « géométriques » de manière intrinsèque : diagrammes d'espace-temps, lignes

d'univers des particules (elles sont intrinsèques).

Le paradoxe des jumeaux :

On considère deux jumeaux : le premier (1) reste fixe en un point de la Terre pendant que le second (2) le quitte, voyage dans l'espace, puis vient retrouver son frère au point de départ. Il faut raisonner en termes de temps propre $d\tau^2 = dt^2(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2})$.

On choisit pour t le temps mesuré dans le référentiel lié à la Terre, donc au jumeau 1.

Vu que $\vec{v}_1 = \vec{0}$, on a $d\tau_1 = dt_1$, d'où $\tau_{1final} - \tau_{1initial} = t_{1final} - t_{1initial}$.

Or $d\tau_2^2 = dt_1^2(1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2})$, d'où $\tau_{2final} - \tau_{2initial} = \int_i^f dt_1 \sqrt{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2}}$.

Or à tout instant t_1 , on a $\sqrt{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2}} < 1$.

Donc $\tau_{2final} - \tau_{2initial} = \int_i^f dt_1 \sqrt{1 - \frac{v_{2/1}^2}{c^2}} < \int_i^f dt_1 = t_{1final} - t_{1initial}$.

On trouve donc que $\tau_{2final} - \tau_{2initial} < \tau_{1final} - \tau_{1initial}$.

Le calcul indique donc qu'à la fin de l'expérience, le jumeau 2 est plus jeune que le jumeau 1, ce qui est vérifié expérimentalement avec des horloges atomiques placées dans des avions (Electrodynamique, Jackson).

On pourrait faire le raisonnement suivant : on se place dans le référentiel du jumeau 1, et en menant les calculs analogues, on obtient $\tau_{1final} - \tau_{1initial} < \tau_{2final} - \tau_{2initial}$, ce qui signifierait qu'en fait le jumeau 1 est plus jeune que le jumeau 2.

On aboutirait alors à un PARADOXE !

Résolution du paradoxe :

La situation ne peut pas être parfaitement symétrique entre le jumeau 1 et le jumeau 2 car sinon, on aurait les deux inégalités contradictoires physiquement.

Qu'est-ce qui différencie le jumeau 1 du jumeau 2 ?

En fait, si on considère 1 comme référentiel d'inertie, alors vu que 2 s'éloigne puis revient, il y a forcément un moment où il est accéléré par rapport à 1. Donc 2 n'est pas un observateur d'inertie, et le raisonnement fait dans son référentiel n'est plus valable.

Plus précisément, en considérant la Terre comme un observateur d'inertie, alors il était correct d'écrire $d\tau^2 = dt_1^2(1 - \frac{v_{1/1}^2}{c^2})$. Par contre, $d\tau^2 = dt_2^2(1 - \frac{v_{2/2}^2}{c^2})$ est incorrect.

C'est donc bien le jumeau 2 qui est plus jeune que le jumeau 1.

Analogie :

On se place dans le plan euclidien classique \mathbb{R}^2 . On considère deux points de coordonnées $(-R, 0)$ et $(R, 0)$, ainsi que deux trajets entre ces points. Le trajet 1 est le segment $[-R, R]$, le trajet 2 est l'arc-de-cercle supérieur de centre $(0, 0)$ et de rayon R .

Alors la longueur entre les deux points est plus importante par le trajet 2 que par le trajet 1 (car $\pi R > 2R$).

On passe en coordonnées polaires (r, θ) . Le trajet 1 consiste alors à aller du point $(R, 0)$ au point $(0, 0)$, puis du point $(0, 0)$ au point $(0, \pi)$, puis du point $(0, \pi)$ au point (R, π) . Quant au trajet 2, il consiste à aller de $(R, 0)$ à (R, π) . La longueur du trajet 1 vaut donc $\pi + 2R$ et celle du trajet 2 vaut π . Ici le trajet 2 semblerait donc plus court. Or ces calculs sont erronés car en polaire on n'a pas $dS^2 = dr^2 + d\theta^2$ (qui correspondrait à la métrique plate), mais on a $dS^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$.

VI - Groupes de Lorentz et de Poincaré

Référence : Weinberg (General Relativity,...).

On considère la métrique $\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Alors $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$.

On opère un changement de coordonnées $X^\mu \rightarrow X'^\mu$, et on souhaite conserver la métrique plate, et donc avoir $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX'^\mu dX'^\nu$.

Or $\eta_{\mu\nu} dX'^\mu dX'^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma} dX^\rho dX^\sigma$, donc pour conserver la métrique plate, il nous faut avoir : $\eta_{\rho\sigma} dX^\rho dX^\sigma = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma} dX^\rho dX^\sigma$.

Ce qui nous mène finalement à $\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma}$.

Si $\mu \neq \nu$, on a $\eta_{\mu\nu} = 0$, donc $\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\nu\nu} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma}$ (sans sommation sur ν).

Si $\rho \neq \sigma$, on a $\eta_{\rho\sigma} = 0$, donc $\frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma} = 0$, donc $\frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\rho} = 0$ ou $\frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma} = 0$, ce qui peut se résumer par $\partial_\mu \partial_\nu X'^\sigma = 0$.

Donc on a $X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu + a^\mu$ où Λ et a sont indépendantes de X .

Si $\Lambda = Id$, on a une translation d'espace-temps : $X'^\mu = X^\mu + a^\mu$.

Ces transformations satisfont $\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma}$, donc préservent la métrique plate.

Si $a = 0$, alors $X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$, et la condition $\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X'^\mu}{\partial X^\rho} \frac{\partial X'^\nu}{\partial X^\sigma}$ se traduit alors par $\eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma$, soit en fait $\eta = {}^t \Lambda \eta \Lambda$.

La matrice Λ compte 16 coefficients, et la matrice ${}^t \Lambda \eta \Lambda$ est symétrique, donc l'égalité $\eta = {}^t \Lambda \eta \Lambda$ nous fournit 10 équations.

Restent donc 6 coefficients libres dans la matrice Λ .

Par ailleurs, la condition $\eta = {}^t \Lambda \eta \Lambda$ impose $(\det \Lambda)^2 = 1$, donc $\det \Lambda = 1$ ou -1 .

Cas particulier : $\det \Lambda = 1$:

On est alors dans le cas du groupe de Lorentz propre. Considérons une transformation infinitésimale $\Lambda = Id + L$. Alors $\eta = {}^t \Lambda \eta \Lambda$ s'écrit $\eta = {}^t (Id + L) \eta (Id + L)$.

On a donc $\eta = (Id + {}^t L) \eta (Id + L)$, soit $\eta = \eta + \eta L + {}^t L \eta + {}^t L \eta L$.

Donc en fait $0 = \eta L + {}^t L \eta + O(L^2)$, soit finalement $0 = \eta L + {}^t L \eta$.

On pose $M = \eta L$. Alors $M = -{}^t L \eta = -{}^t L {}^t \eta = -{}^t (\eta L) = -{}^t M$, donc la matrice $M = \eta L$ est antisymétrique.

Si on repart de $0 = \eta L + {}^t L \eta$, vu que $\eta^2 = Id$, on a $0 = L + \eta {}^t L \eta$.

Donc $\eta {}^t L \eta = -L$, ce qui vu la forme de η , nous donne que les coefficients diagonaux de L sont nuls. Finalement L est de la forme suivante :

$$L = \begin{bmatrix} 0 & L_{01} & L_{02} & L_{03} \\ L_{01} & 0 & L_{12} & L_{13} \\ L_{02} & L_{12} & 0 & L_{23} \\ L_{03} & L_{13} & L_{23} & 0 \end{bmatrix}.$$

Les coefficients L_{01} , L_{02} et L_{03} correspondent aux boosts ou transformations de Lorentz pures, les coefficients L_{12} , L_{13} et L_{23} correspondent eux aux rotations.

Exemple :

Considérons la matrice $L = \begin{bmatrix} 0 & -\psi & 0 & 0 \\ -\psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

On peut calculer e^L , on trouve alors $e^L = \begin{bmatrix} \text{ch}(\psi) & -\text{sh}(\psi) & 0 & 0 \\ -\text{sh}(\psi) & \text{ch}(\psi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Si l'on identifie avec une écriture de la forme $e^L = \begin{bmatrix} \gamma_e & -\gamma_e \beta_e & 0 & 0 \\ -\gamma_e \beta_e & \gamma_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, on

trouve alors $\boxed{\gamma_e = \text{ch}(\psi)}$ et $\boxed{\beta_e = \text{th}(\psi)}$.

Cela correspond bien à une transformation de Lorentz pure selon l'axe x .

ψ est appelé la rapidité.

En particulier si l'on opère deux transformations de Lorentz successives selon l'axe x , $\Lambda(v'_e)$ et $\Lambda(v_e)$ respectivement associées aux rapidités ψ et ψ' , alors la composée $\Lambda(v'_e)\Lambda(v_e)$ est associée à la rapidité $\psi + \psi'$.

Du point de vue de l'algèbre, on note :

- J_i : Générateurs associés aux rotations ;
- K_i : Générateurs associés aux transformations de Lorentz pures.

Par exemple, on a $K_1 = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$

On a les formules $[J_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k$, $[J_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k$ et $[K_i, J_j] = \varepsilon_{ijk} J_k$.

En résumé, si on cherche un changement de coordonnées qui préserve la métrique plate, on trouve les rotations et les transformations de Lorentz pures.

Applications :

- Précession de Thomas, 1927 (cf. Goldstein) ;
- Facteur gyromagnétique de l'électron.

8 Dynamique relativiste

La mécanique newtonienne apparaît comme une approximation pour $v \ll c$ de la mécanique de la relativité restreinte. Le but de ce chapitre est donc de :

- Construire cette mécanique de relativité restreinte ;
- Introduire le quadrivecteur impulsion-énergie ;
- Présenter les applications de cette dynamique.

I - Equation de la dynamique

On cherche une analogue de $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}$.

On a appris qu'une bonne relation doit être une égalité entre quadrivecteurs (cela garantit un bon comportement sous changement d'observateurs).

Ecrivons alors $m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = F^\mu$.

Mais quel est alors ce quadrivecteur force F^μ ? Quel est son lien avec \vec{f} ?

Par ailleurs, on remarquera que le concept de force à distance qui change instantanément n'est pas compatible avec la relativité restreinte. L'exemple type de ce cas est la particule chargée dans un champ électromagnétique. Comment la force de Lorentz est-elle modélisée en dynamique relativiste ? Réponse en M1.

Le quadrivecteur vitesse est $U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$.

On a alors $m \frac{dU^\mu}{d\tau} = F^\mu$, donc $m U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} = U_\mu F^\mu$, d'où $m \frac{d}{d\tau} \left(\frac{(U^\mu)^2}{2} \right) = U_\mu F^\mu$.

Finalement, $\frac{m}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{c^2}{2} \right) = U_\mu F^\mu$, d'où $U_\mu F^\mu = 0$.

On en arrive à la conclusion que F^μ doit vérifier $U^\mu F_\mu = 0$.

II - Action de la particule relativiste libre

On considère ici une particule de masse non nulle, dont le chemin dans l'espace-temps est paramétré par $\sigma : X^\mu(\sigma)$ avec $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$.

On va montrer qu'à un facteur près, l'action S est simplement la longueur (dans l'espace-temps) entre M_1 et M_2 , c'est-à-dire $S = -mc \int_{M_1}^{M_2} ds$.

On sait que $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu$, donc $ds = \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} d\sigma$.

On en tire que :
$$S[X^\mu(\sigma)] = -mc \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} d\sigma.$$

Pour une paramétrisation par $\sigma'(\sigma)$, on a $\frac{dX^\mu}{d\sigma'} = \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{d\sigma}{d\sigma'}$, et donc on garde l'expression $S[X^\mu(\sigma)] = -mc \int_{\sigma'_1}^{\sigma'_2} \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma'} \frac{dX^\nu}{d\sigma'}} d\sigma'$.

Equations d'Euler-Lagrange :

Vérifions que $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \sigma} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = 0$.

Dans l'expression de S , on voit que L ne dépend que des $\frac{\partial X^\alpha}{\partial \sigma}$ et pas des X^α , donc on a d'ores et déjà $\frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = 0$.

Maintenant, $L = -mc \sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}} = -mc \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX_\mu}{d\sigma}}$.

Donc $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial X^\alpha}{\partial \sigma} \right)} \right) = -mc \frac{2 \frac{dX_\mu}{d\sigma}}{2 \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX_\mu}{d\sigma}}}.$

Il faut donc que l'égalité $\frac{d}{d\sigma} \left(-mc \frac{\frac{dX_\mu}{d\sigma}}{\sqrt{\frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX_\mu}{d\sigma}}} \right) = 0$ soit vérifiée.

Ce qui revient à $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\frac{dX_\mu}{d\sigma}}{\sqrt{\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\sigma} \frac{dX^\nu}{d\sigma}}} \right) = 0$ donc à $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{\frac{dX_\mu}{d\sigma}}{\frac{ds}{d\sigma}} \right) = 0$.

Or $ds = c d\tau$, donc il faut vérifier $\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dX_\mu}{d\tau} \right) = 0$.

Le principe de moindre action s'écrit alors
$$\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dX_\mu}{d\tau} \right) = 0.$$

Alors $\frac{d}{d\tau} \left(\frac{dX_\mu}{d\tau} \right) = \left[\frac{d}{d\sigma} \left(\frac{dX_\mu}{d\tau} \right) \right] \left[\frac{d\sigma}{d\tau} \right] = 0$.

On retrouve bien un mouvement de particule libre :
$$m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = 0.$$

Remarques :

- 1) m est un invariant relativiste et $m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2}$ est un quadrivecteur.
- 2) On a utilisé un paramètre σ quelconque, mais on aurait pu utiliser un paramètre particulier, comme $X^0 = ct$.

Rappel : on a $ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - \vec{v}(t)^2 dt^2$, ce qui donne $S = -mc \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}$.

Invariance par translation d'espace-temps :

Longueur : c'est clairement un invariant par translation.

En effet, on a $\delta X^\mu = \alpha^\mu$ avec α^μ indépendant de σ .

De plus, S ne dépend que de $\frac{dX^\mu}{d\sigma}$ et $\delta(\frac{dX^\mu}{d\sigma}) = 0$.

α^0 correspond à la translation temporelle multipliée par c , et les α^i suivants correspondent à la translation spatiale.

Quantité conservée :

Le théorème de Noether nous donne alors la quantité conservée suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial(\frac{dX^\mu}{d\sigma})} = -m \frac{dX_\mu}{d\tau}, \text{ soit } \boxed{P^\mu = m \frac{dX^\mu}{d\tau}}.$$

On a alors $\frac{dP^\mu}{d\tau} = m \frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2} = 0$, P^μ est associé à l'invariance par translation d'espace-temps.

On se rappelle qu'en mécanique newtonienne, l'invariance par translation temporelle était associée à la conservation de l'énergie. On a donc en fait $\boxed{E = P^0 c}$.

III - Quadrivecteur Energie-Impulsion

On a $P^\mu = mU^\mu = (\gamma mc, \gamma m \vec{v})$. Or $E = P^0 c = P^0 \gamma mc^2$.

Ainsi, l'énergie d'une particule relativiste massive, de masse m , se déplaçant à une

vitesse v , vaut $\boxed{E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$.

En particulier, pour une particule massive au repos, on a $\boxed{E_{repos} = mc^2}$.

On trouve donc qu'une particule massive au repos a une énergie non nulle : c'est le principe d'équivalence masse-énergie, avec le coefficient c^2 entre les deux.

On peut définir l'énergie cinétique T comme la partie de E qui est due uniquement au mouvement de la particule, ce qui donne $T = E - E_{repos}$.

Donc $\boxed{T = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2}$ ou encore $\boxed{T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2}$.

Limite newtonienne :

Dans la limite $v \ll c$, alors $T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = mc^2(1 + \frac{v^2}{2c^2}) - mc^2$.

Donc $T = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - mc^2 - mc^2$ et on retrouve $T = \frac{1}{2}mv^2$, ce qui est l'expression connue de l'énergie cinétique en mécanique newtonienne.

On sait que $U^\mu U_\mu = c^2$ et $P^\mu = mU^\mu$, donc $P^\mu P_\mu = m^2 c^2$.

Le quadrivecteur énergie-impulsion s'écrit $P^\mu = (P^0 = \frac{E}{c}, \vec{P})$.

Donc on a aussi $P^\mu P_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2$. Or on avait $P^\mu P_\mu = m^2 c^2$.

Donc en fait, $\frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2 = m^2 c^2$, d'où $E^2 - \vec{P}^2 c^2 = m^2 c^4$.

Par ailleurs, $P^\mu = mU^\mu$, donc $\vec{P} = \gamma m \vec{v}$.

Quadrivecteur impulsion-énergie dans le cas du photon :

On part de $\tilde{P} = (P^0 = \frac{E}{c}, \vec{P})$, ce qui suggère de poser $E = \hbar\omega$ et $\vec{P} = \hbar \vec{k} = \hbar \frac{\omega}{c} \vec{n}$.

On obtient donc $\tilde{P} = \frac{\hbar\omega}{c} (1, \vec{n})$.

Alors on trouve $P^\mu P_\mu = 1^2 - \vec{n}^2 = 1 - 1 = 0$, ce qui est cohérent puisque, pour une particule massique, $P^\mu P_\mu = m^2 c^2$, et le photon est de masse nulle.

Remarque :

$E = \gamma mc^2$ et $\|\vec{P}\| = \gamma mv$, donc $\frac{E}{\|\vec{P}\|} = \frac{c^2}{v}$, soit $\frac{E}{c\|\vec{P}\|} = \frac{c}{v}$.

Or, pour une particule de masse nulle, $P^\mu P_\mu = 0$, ce qui équivaut à $E = \|\vec{P}\|c$, et donc l'égalité précédente nous donne $v = c$.

Conclusion : une particule de masse nulle ne peut avoir que la vitesse de la lumière.

IV - Ordres de grandeur (1ère partie)

On sait que $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

L'équivalence masse-énergie permet alors d'exprimer la masse au repos.

Pour un électron, $m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} = 0,5 \text{ MeV}/c^2$.

Pour un proton, $m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$.

V - Application aux collisions

On se place dans le cas le plus général : les collisions peuvent être élastiques (on retrouve les mêmes particules avant et après la collision) ou inélastiques (on ne retrouve plus les mêmes particules après la collision).

Considérons, par exemple, une collision inélastique avec 3 particules entrantes et 2 sortantes. On a conservation du quadrivecteur énergie-impulsion total.

Autrement dit, $\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 + \tilde{P}_3 = \tilde{P}'_1 + \tilde{P}'_2$.

On peut s'intéresser à des quantités dont la valeur ne dépend pas du référentiel, comme les produits scalaires, en particulier $\tilde{P}_1 \tilde{P}_1 = m_1^2 c^2$.

1. Absence de conservation de la masse totale

Considérons une collision (inélastique) : $1(m) + 2(m) \rightarrow 1'(M)$.

Dans, le référentiel de $1'$, on a $\tilde{P}' = (Mc, \vec{0})$, $\tilde{P}_1 = (\gamma_1 mc, \gamma_1 m \vec{v}_1)$ et $\tilde{P}_2 = (\gamma_2 mc, \gamma_2 m \vec{v}_2)$.

Or la conservation du quadrivecteur impulsion-énergie donne $\tilde{P}_1 + \tilde{P}_2 = \tilde{P}'$.

D'où le système d'équations $\begin{cases} \gamma_1 mc + \gamma_2 mc = Mc \\ \gamma_1 m \vec{v}_1 + \gamma_2 m \vec{v}_2 = \vec{0} \end{cases}$.

En particulier, $\gamma_1 \vec{v}_1 = -\gamma_2 \vec{v}_2$, ce qui donne, en norme, $\gamma_1 v_1 = \gamma_2 v_2$.

On a donc $\frac{v_1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = \frac{v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$, d'où $v_1 = v_2$ et donc $\gamma_1 = \gamma_2 (= \gamma)$.

Par ailleurs, on avait $\gamma_1 mc + \gamma_2 mc = Mc$, donc en fait $M = 2\gamma m$.

Par conséquent, $M = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \neq 2m !!!$

Le facteur γ traduit bien sûr les effets relativistes : $\Delta M = M - 2m = (\gamma - 1)2m$.

D'ailleurs, $\Delta Mc^2 = (\gamma - 1)2mc^2 = (\gamma - 1)mc^2 + (\gamma - 1)mc^2 = T_1 + T_2$.

Donc il y a bien eu conservation de l'énergie, l'énergie cinétique des particules d'avant la collision étant restituée sous forme de masse dans la particule d'après la collision.

Ordre de grandeur : pour $v = 300 \text{ m.s}^{-1}$, $\frac{\Delta M}{2m} = \gamma - 1 \simeq 5 \times 10^{-13}$, ce qui est négligeable, la vitesse étant trop faible pour observer des effets relativistes significatifs.

2. Energie de liaison

Il peut arriver qu'il faille fournir une énergie ΔW à un système de masse M au repos, pour le séparer en plusieurs constituants m_i indépendants, tous au repos.

On a alors l'égalité $Mc^2 + \Delta W = \sum_i m_i c^2$.

ΔW est alors appelée l'énergie de liaison de la particule composée.

Exemple :

Dans le cas de l'Hydrogène, $M(\text{proton}) + M(\bar{e}) - M(H) = 13,6 \text{ eV}/c^2$.

Dans le cas du Deutéron, $M(\text{neutron}) + M(\text{proton}) + M(\bar{e}) - M(D) = 2,22 \text{ eV}/c^2$.

On constate que cette différence de masse est plus forte dans le cas du deutéron que dans celui de l'hydrogène simple, car ce sont alors des forces nucléaires et non électrodynamiques qui sont mises en jeu.

Réaction :

Particules initiales (i) \rightarrow particules finales (f).

On définit alors $Q = (\sum_i m_i - \sum_f m_f)c^2$.

Si $Q > 0$, la réaction est dite **exothermique**.

Si $Q < 0$, la réaction est dite **endothermique**.

Exemple :

$n \rightarrow p + \bar{e} + \nu_e$.

Vu que $m(\nu_e) \simeq 0$, on a $Q = m(n) - m(p) - m(\bar{e}) \simeq 0,78 \text{ MeV}/c^2$.

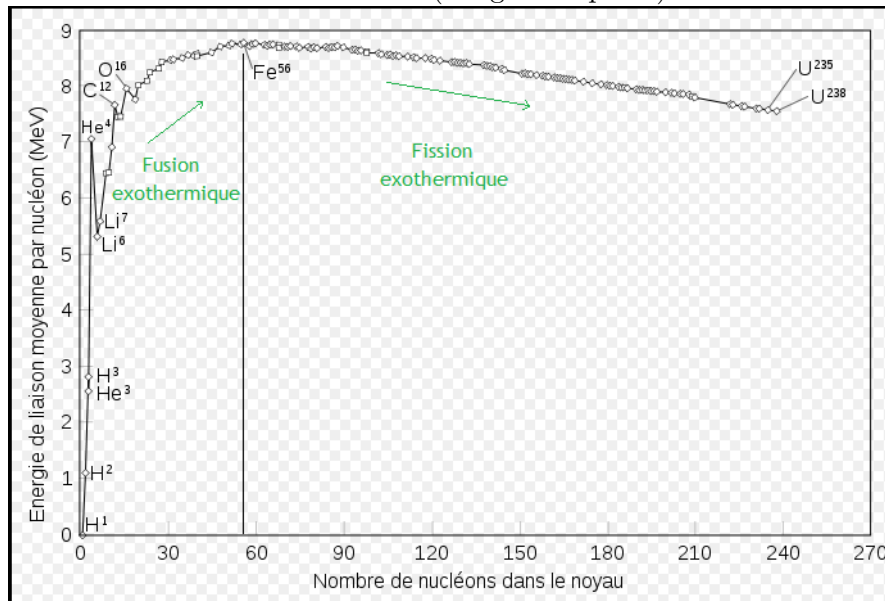
VI - Ordres de grandeur (2nde partie)

Considérons un noyau A_ZX : Z protons et $A - Z$ neutrons.

L'énergie de liaison est alors $B(A, Z) = Zm_p + (A - Z)m_n - M({}^A_ZX)$.

On peut également définir l'énergie de liaison par nucléon : $\boxed{\frac{B}{A}}$.

Courbe d'Aston (image Wikipédia) :



La courbe d'Aston indique la possibilité de réaliser des réactions nucléaires exothermiques.

Par exemple, pour une fission, un passage de $\frac{B}{A} = 7,5 \text{ MeV/nucleon}$ à $8,4 \text{ MeV/nucleon}$ apporte un gain de $0,9 \text{ MeV/nucleon}$, donc $\simeq 100 - 200 \text{ MeV/noyau}$.